Tentamen i Flervariabelanalys, MVE035
2016-03-14, π, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.
Telefon: anknytning 5325
Telefonvakt: Raad Salman
För godkänt krävs minst 20 poäng.
Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2016 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida. Talen i parentes bredvid uppgifterna och deluppgifterna anger antalet poäng de ger.

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.
Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska Vetenskaper, Chalmers Tekniska Högskola

1. I deluppgifterna nedan, låt $f(x, y) = 2x^4 + y^2 + x$.
   (a) Bestäm tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 1, 4)$. (2)
   (b) Bestäm Taylorutvecklingen av f upp till grad 2 i punkten $(1, 1)$. (2)
   (c) Finn och klassificera kritiska (boken: *stationära*) punkter till f. (2)
   (d) Bestäm globalt max och min av funktionen f på området av alla $x \in [-1, 0], y \in [-1, 1]$. Motivera! (2)
   (e) Visa att nivåytan C bestämd av $F(x, y, z) := z - f(x, y) = 0$ kan, lokalt runt $(-1, 1, 2)$, skrivas som grafen $x = g(y, z)$ för en $\mathcal{C}^1$ funktion $g(y, z)$ definierad i en omgivning till punkten $(1, 2)$ och bestäm $\nabla g(1, 2)$. Obs. du behöver inte konstruera g explicit, bara visa dess existens och ange dess gradient i $(1, 2)$. (4)

2. Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy - ayz, x^2 - xz, z - xy)$. Bestäm konstanten a så att $\mathbf{F}$ blir konservativt, och för detta a räkna ut arbetet $\mathbf{F}$ utför längs kurvan $\mathbf{r}(x) = (x, 1 - x^5, 1 - x^5)$ där x går från 0 till 1. (4)

3. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = (-x^2 y, e^{-\sin(y)})$. Beräkna arbetet som $\mathbf{F}$ utför längs kurvan γ som består av två delar: Först $\mathbf{r}(t) = (1 - t, t)$ där t går från 0 till 1, följt av $\mathbf{r}(t) = (-t, 1 - t)$, t går från 0 till 1. (5)

4. En cylinder $x^2 + y^2 = 1$ skärs av två plan $z = 2$ och $z = y + 1$. Dessa tre ytor begränsar tillsammans ett kompakt område K. Kalla också Y den del av randen till K som ligger på planet $z = y + 1$, och Z den del av randen till K som ligger på cylindern $x^2 + y^2 = 1$.
   (a) Beräkna massan för K om vi har en densitet på formen $\rho(x, y, z) = z$. (3)

(b) Vi ges ett vektorfält $\mathbf{F} = (y, -x, z^2)$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ner genom Y. (3)

(c) Bestäm ytarea-elementet dS på Z för lämplig parametrisering $\mathbf{r}$ via cylindriska koordinater och räkna ut arean till Z genom att sätta upp och räkna ut relevant ytintegral. (4)

5. Formulera och bevisa satsen om Taylorutvecklingar upp till grad 2 med felterm av ordning 3, för en funktion i 2 variabler. (6)

6. Formula och bevisa Greens sats för en rektangel $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. (6)

7. I denna uppgift, antag att $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$. Funktionen ϕ säges ha *medelvärdesegenskapen* om för alla $r > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(\mathbf{x})} \phi dS$. Här är $S_r(\mathbf{x})$ sfären med radie r med centrum i $\mathbf{x}$ och dS ytareaelementet därpå.

   (a) Visa att ϕ har medelvärdesegenskapen om och endast om $A(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(\mathbf{x})} \phi dS$ är konstant i variabeln $r > 0$. (2)

   (b) Visa att ϕ har medelvärdesegenskapen om och endast om $\Delta\phi := \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = 0$. Här kan (a) vara till hjälp. (5)

Totalt 7 frågor med totalt 50 poäng. Grattis också på π-dagen och lycka till! /Dennis