Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035
2016-04-02, kl. 14-18

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.
Telefon: anknytning 5325
Telefonvakt: Edvin Wedin
För godkänt krävs minst 20 poäng.
Betyg 3: 20-29.5 poäng, betyg 4: 30-39.5 poäng, betyg 5: 40 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2016 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida.

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper. *OBS. för att underlätta rättning senare, om möjligt fatta er kort och koncist.*
Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska Vetenskaper, Chalmers Tekniska Högskola

1. I deluppgifterna nedan, låt $f(x, y, z) := x^2 - z^2 + 1$ och $g(x, y) := xy - yx^2 + (x - 1)^3$.
   (a) Bestäm tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 1$ i punkten $(1, 1, 1)$. (2)
   (b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 för $g(x, y)$ i punkten $(1, 1)$. (2)
   (c) Bestäm minsta avståendet från nivåytan $f(x, y, z) = 0$ till origo genom att tillämpa Lagranges metod. (4)
   (d) Visa att nivåkurvan $g(x, y) = 0$ i en omgivning av $(1, 1)$, kan skrivas som $x = h(y)$ för en $\mathcal{C}^1$ funktion h i en omgivning till punkten 1 och bestäm sedan $h'(1)$. Obs. du behöver inte konstruera h explicit, utan endast visa dess existens och räkna ut derivatan vid värdet 1. (4)

2. Låt $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x^2)$ vara ett vektorfält. Låt T beteckna randen till triangeln med hörn i $(0, 0), (1, 0), (0, 2)$ med positiv orientering. Räkna ut arbetsintegralen av $\mathbf{F}$ längs T. (4)

3. Betrakta området K som begränsas av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ och konen $3z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$. Beräkna flödet in i ∂K av vektorfältet (4)
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-xy^2, 2yz^2 + e^{\sin(-z^3 - x^2 z)}, -z^3 - x^2 z).$$

4. Ställ upp integralen $\iint_R y f(x, y) dA$ där R är regionen som begränsas av de fyra kurvorna $x^2 y = 4, x^2 y = 9, y/x = 1, y/x = 2$ som en dubbelintegral i variablerna $u = x^2 y, v = y/x$. Här är integranden en godtycklig kontinuerlig funktion f gånger y. Integralen skall vara 'färdig att räkna ut' och integranden ska efteråt inte längre bero på x och y. (4)

5. Låt $G = -\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ vara gravitationsfältet, där vi använder notationen $\mathbf{r} = (x, y, z)$, definierat i $D = \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$.

   (a) Visa att G är källfritt och virvelfritt (rotationsfritt) genom att räkna ut $\operatorname{div} G$ och $\operatorname{curl} G$ (boken: *rot* G) i D. (3)

   (b) Skriv upp satsen om när virvelfria vektorfält är konservativa och visa att G är konservativt. (3)

   (c) Räkna ut flödet ut genom $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ av $\mathbf{G}$ och visa med hjälp av Stokes sats att G inte har en vektorpotential, dvs. $G \neq \nabla \times F$ för något $\mathcal{C}^2$ vektorfält F på D. (3)

6. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en funktion.

   (a) Definiera vad det innebär att f är differentierbar i punkten $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$. (2)

   (b) Definiera begreppet riktningsderivata för f, och bevisa formeln för riktningsderivatan under rimliga förutsättningar. (5)

7. Skriv upp, men bevisa ej, medelvärdessatsen för f definierad på ett delområde K av $\mathbb{R}^2$, med lämpliga hypoteser på f och K. (3)

8. En funktion $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ säges ha *medelvärdesegenskapen* om för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, så är $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{S_r(\mathbf{x})} \phi ds$, där $S_r(\mathbf{x})$ är en godtycklig cirkel med radie r med centrum i $\mathbf{x}$ och ds är båglängdselementet.

   (a) Visa att om ϕ har medelvärdesegenskapen, och D är en godtycklig sluten disk i planet, så ligger maximum av ϕ på ∂D. (4)

   (b) Om ϕ och ψ båda har medelvärdesegenskapen och $\phi = \psi$ på ∂D, så är $\phi = \psi$ i hela D. (3)

Totalt 8 frågor med totalt 50 poäng. Lycka till! /Dennis

Denna uppgift ger inga poäng, och är inte heller någon ledning, men det är värt att notera att liksom i det 3-dimensionella fallet är medelvärdesegenskapen ekvivalent med $\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$.

Lösningar

1a. Tangentplanet för en nivåyta $f = c$ i punkten (a, b, c) ges av $\nabla f(a, b, c) \bullet (x - a, y - b, z - c) = 0$. I detta fallet är $\nabla f(1, 1, 1) = (2x, 0, -2z)|_{(x,y,z)=(1,1,1)} = (2, 0, -2)$ så vi får ekvationen $(2, 0, -2) \bullet (x - 1, y - 1, z - 1) = 0$ eller $x - z = 0$.
1b. Taylorpolynomet av grad 2 i en punkt (a, b) kan skrivas som, där vi satt $h = x - a, k = y - b$,

$$P(h, k) = g(a, b) + g_x(a, b)h + g_y(a, b)k + \frac{1}{2}[g_{xx}(a, b)h^2 + 2g_{xy}(a, b)hk + g_{yy}(a, b)k^2].$$

Det räcker från föregående uppgift att räkna ut 2:a-derivatorna i $(1, 1)$. Det görs lätt, och vi finner att

$$P(h, k) = -h - h^2 - hk.$$

1c. Vi vill maximera funktionen $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, med bivillkoret $x^2 - z^2 = 1$. Detta kan likväl göras för funktionen $x^2 + y^2 + z^2$. Detta kan göras med insättning $z^2 = x^2 - 1$ i funktionen vi är intresserade av, men också med hjälp av Lagranges metod som är det som efterfrågas. Jag gör beviset med hjälp av Lagrange. Detta innebär att vi söker efter kritiska punkter till $L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 - z^2 - 1)$. Den ger oss direkt tre ekvationer

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda 2x \\ 2y &= 0 \\ 2z &= -\lambda 2z \\ x^2 - z^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Vi ser att $\lambda \neq 0$, eftersom då skulle $x = z = 0$ och då skulle sista ekvationen inte vara uppfylld. Från första och tredje ekvationen får vi alltså att $\lambda = 1$ och $x = 0$, eller $\lambda = -1$ och $z = 0$. Det andra alternativet med $z = 0$ uppfyller inte den sista ekvationen eftersom $x^2 + 1$ aldrig kan vara noll. Alltså är $x = 0$ och vi får från sista ekvationen att $z = \pm 1$. Slutsatsen är att funktionen $x^2 + y^2 + z^2$ är minimal för $y = x = 0$, $z = \pm 1$, och vi får alltså $a = 1$.
1d. Det är svårt att lösa ut x ur den implicit definierande ekvationen. Istället använder vi att om $g_x(1, 1) \neq 0$, så säger implicita funktionssatsen att ett sådant h finns. Men $g_x = y - 2xy + 3(x - 1)^2$, som är -1 för $(x, y) = (1, 1)$. Vi vet också att $h_y = -g_y/g_x$. Om man inte kommer ihåg detta, kan det härledas från formlerna $g(h(y), y) = 0$, och $0 = dg/dy = g_x h_y + g_y$, där den senare följer från kedjeregeln. Eftersom $g_y(1, 1) = 0$ får vi att $h'(1) = 0$.
2. Detta görs enklast med Greens sats, som säger att för ett vektorfält $\mathbf{F}$ över det inre till T, låt oss kalla det D, så gäller

$$\int_T \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

I vårt fall får vi $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x+1$. Området D kan parametriseras med $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2-2x$, så vår integral blir

$$\int_0^1 \int_0^{2-2x} 2x + 1 dydx = \int_0^1 -4x^2 + 2x + 2dx = 4/3 + 1 - 2 = 5/3.$$

3. Detta kan lättast (endast?) räknas ut med Gauss divergenssats, som säger att

$$\iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_{\partial K} \mathbf{F} \bullet \mathbf{N} dS$$

där $\mathbf{N}$ är en utåtriktad enhetsnormal. Vi får byta tecken eftersom vi vill ha flödet innåt. I det här fallet är divergensen enkel, den ges av $-x^2 - y^2 - z^2$. Trippelintegralen räknas nu enklast ut med sfäriska koordinater,

$$x = R\cos\theta\sin\phi, y = R\sin\theta\sin\phi, z = R\cos\phi, dV = R^2 \sin\phi dR d\phi d\theta.$$

Det återstår att bestämma integrationsgränserna. Det är klart att $0 \le R \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi$. Vi bestämmer ϕ genom att hitta vinkeln ϕ på konen. Den uppfyller $\tan\phi = \sqrt{x^2+y^2}/z = \sqrt{3}$ vilket medför $\phi = \pi/3$. Vi kan nu räkna ut får integral, med negativt tecken på grund av orientering,

$$-\iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} R^4 \sin\phi d\phi d\theta dR.$$

Vi får direkt

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} R^4 \sin\phi d\phi d\theta dR = 2^5/5 * 2\pi * [-\cos(\pi/3) + \cos(0)] = 2^6/5\pi(1-1/2) = 32\pi/5.$$

4. Integralen ges av

$$\int_1^2 \int_4^9 yf(u,v) \frac{d(x,y)}{d(u,v)} dudv$$

där $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$ är funktionaldeterminanten för $(u,v) \mapsto (x,y)$. Om det är krångligt att lösa ut x och y och räkna med dessa ($x = u^{1/3}v^{-1/3}, y = u^{1/3}v^{2/3}$) kan man också använda relationen $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = 1$, så det räcker att räkna ut funktionaldeterminanten för det inversa variabelbytet. Vi får att

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ -y/x^2 & 1/x \end{pmatrix}$$

vars determinant ges av $3y$ och vars absolutbelopp ges av $3\|y\| = 3y$ eftersom $y > 0$. Vi får alltså att $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = 1/3y$, så att integralen blir

$$\int_1^2 \int_4^9 yf(u,v)/3ydudv = \int_1^2 \int_4^9 f(u,v)/3dudv.$$

5a + b. Det är lämpligt att räkna ut alla partiella derivator av $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$. Man kan också direkt se att $U = 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ger en potential till $\mathbf{G}$ och alltså är $\operatorname{curl}\mathbf{G} = \operatorname{curl}\nabla U = 0$ enligt standardidentitet, och det ger också att $\mathbf{G}$ är konservativt. Om man räknat ut och visat $\operatorname{curl}\mathbf{G} = 0$ kan man istället argumentera för att $\mathbf{G}$ är virvelfritt på ett enkelt sammanhängande område för att garantera att det är konservativt, dvs. har en potential.
För att visa att $\mathbf{G}$ är källfritt, dvs. $\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = 0$ räknar vi ut $-\partial(x/(x^2+y^2+z^2)^{3/2})/\partial x$, de andra räknas ut på analogt sätt. Det ges av

$$-\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$$

Om vi summarar denna med motsvarande term beroende på y och z får vi

$$-\frac{3(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} = 0.$$

5c. Låt S vara enhetssfären som i uppgiften. Flödesintegralen $\iint_S G \bullet \mathbf{N} dS$ beräknas relativt enkelt. $G \bullet \mathbf{N}$ ges av $-(x^2+y^2+z^2) = -1$. Alltså är $\iint_S G \bullet \mathbf{N} dS = -\operatorname{Area}(S) = -4\pi$. Om nu G hade en vektorpotential $\operatorname{curl} F$ skulle enligt Stokes sats flödesintegralen i uppgiften motsvara en arbetsintegral av F längs randen på S. Men det finns ingen rand (eller så kan man argumentera utifrån att alla rimliga definitioner av ränder ger obefintliga ränder), så resultatet borde vara noll. Men resultatet blev -4π vilket är orimligt.
6. Se boken.
7. Se boken.
8a. Antag att maximum till ϕ ligger i det inre till D, säg i punkten $\mathbf{x}$. Då finns en liten disk med radie, säg, r runt $\mathbf{x}$ som helt ligger i D. Om ϕ inte är en konstant kan vi välja r så att det finns en punkt a på randen till $S_r(\mathbf{x})$ så att $\phi(a) < \phi(\mathbf{x})$. Eftersom ϕ är kontinuerlig gäller detta även i en liten omgivning till a. Eftersom för de andra punkterna a' på $S_r(\mathbf{x})$ gäller att $\phi(a') \leq \phi(\mathbf{x})$ får vi alltså att

$$\frac{1}{2\pi r}\iint_{S_r(\mathbf{x})} \phi ds < \frac{1}{2\pi r}\iint_{S_r(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x}) ds = \phi(\mathbf{x}).$$

Detta motsäger att ϕ har medelvärdesegenskapen, om ϕ inte är konstant i vilket fall påståendet är trivialt.
8b. Om både ϕ och ψ har medelvärdesegenskapen är det klart att $\phi - \psi$ och $\psi - \phi$ har medelvärdesegenskapen. De har alltså båda sina maximum på randen till D. Men enligt hypotes är de lika på randen, från vilket det följer att maximum för $\phi - \psi$ på D är noll. Men vi har också att maximum för $\psi - \phi$ är noll, men eftersom $\psi - \phi = -(\phi - \psi)$ är det också infimum för $\phi - \psi$. Det följer att $\phi - \psi$ måste vara konstant, och konstant lika med 0, i D, dvs. funktionerna är lika.