Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035
2016-04-02, kl. 14-18

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.
Telefon: anknytning 5325
Telefonvakt: Edvin Wedin
För godkänt krävs minst 20 poäng.
Betyg 3: 20-29.5 poäng, betyg 4: 30-39.5 poäng, betyg 5: 40 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2016 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida.

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper. *OBS. för att underlätta rättning senare, om möjligt fatta er kort och koncist.* Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska Vetenskaper, Chalmers Tekniska Högskola

1. I deluppgifterna nedan, låt $f(x, y, z) := x^2 - z^2 + 1$ och $g(x, y) := xy - yx^2 + (x-1)^3$.
   (a) Bestäm tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 1$ i punkten $(1, 1, 1)$. (2)
   (b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 för $g(x, y)$ i punkten $(1, 1)$. (2)
   (c) Bestäm minsta avståendet från nivåytan $f(x, y, z) = 0$ till origo genom att tillämpa Lagranges metod. (4)
   (d) Visa att nivåkurvan $g(x, y) = 0$ i en omgivning av $(1, 1)$, kan skrivas som $x = h(y)$ för en $\mathcal{C}^1$ funktion h i en omgivning till punkten 1 och bestäm sedan $h'(1)$. Obs. du behöver inte konstruera h explicit, utan endast visa dess existens och räkna ut derivatan vid värdet 1. (4)

2. Låt $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x^2)$ vara ett vektorfält. Låt T beteckna randen till triangeln med hörn i $(0, 0), (1, 0), (0, 2)$ med positiv orientering. Räkna ut arbetsintegralen av $\mathbf{F}$ längs T. (4)

3. Betrakta området K som begränsas av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ och konen $3z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$. Beräkna flödet in i ∂K av vektorfältet (4)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-xy^2, 2yz^2 + e^{\sin(-z^3 - x^2 z)}, -z^3 - x^2 z).$$

4. Ställ upp integralen $\iint_R yf(x, y)dA$ där R är regionen som begränsas av de fyra kurvorna $x^2y = 4, x^2y = 9, y/x = 1, y/x = 2$ som en dubbelintegral i variablerna $u = x^2y, v = y/x$. Här är integranden en godtycklig kontinuerlig funktion f gånger y. Integralen skall vara 'färdig att räkna ut' och integranden ska efteråt inte längre bero på x och y. (4)

5. Låt $G = -\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ vara gravitationsfältet, där vi använder notationen $\mathbf{r} = (x, y, z)$, definierat i $D = \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$.

   (a) Visa att G är källfritt och virvelfritt (rotationsfritt) genom att räkna ut $\operatorname{div} G$ och $\operatorname{curl} G$ (boken: *rot* G) i D. (3)

   (b) Skriv upp satsen om när virvelfria vektorfält är konservativa och visa att G är konservativt. (3)

   (c) Räkna ut flödet ut genom $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ av $\mathbf{G}$ och visa med hjälp av Stokes sats att G inte har en vektorpotential, dvs. $G \neq \nabla \times F$ för något $\mathcal{C}^2$ vektorfält F på D. (3)

6. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en funktion.

   (a) Definiera vad det innebär att f är differentierbar i punkten $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$. (2)

   (b) Definiera begreppet riktningsderivata för f, och bevisa formeln för riktningsderivatan under rimliga förutsättningar. (5)

7. Skriv upp, men bevisa ej, medelvärdessatsen för f definierad på ett delområde K av $\mathbb{R}^2$, med lämpliga hypoteser på f och K. (3)

8. En funktion $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ säges ha *medelvärdesegenskapen* om för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, så är $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{S_r(\mathbf{x})} \phi ds$, där $S_r(\mathbf{x})$ är en godtycklig cirkel med radie r med centrum i $\mathbf{x}$ och ds är båglängdselementet.

   (a) Visa att om ϕ har medelvärdesegenskapen, och D är en godtycklig sluten disk i planet, så ligger maximum av ϕ på ∂D. (4)

   (b) Om ϕ och ψ båda har medelvärdesegenskapen och $\phi = \psi$ på ∂D, så är $\phi = \psi$ i hela D. (3)

Totalt 8 frågor med totalt 50 poäng. Lycka till! /Dennis

Denna uppgift ger inga poäng, och är inte heller någon ledning, men det är värt att notera att liksom i det 3-dimensionella fallet är medelvärdesegenskapen ekvivalent med $\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$.