

Partiella differentialekvationer av första ordningen

Kjell Holmåker

23 februari 2005*

En *kvasilinjär* partiell differentialekvation av första ordningen är av formen

$$P(x, y, u)u'_x + Q(x, y, u)u'_y = R(x, y, u) \quad (1)$$

Ekvationen är linjär, om P och Q är oberoende av u , och om $R(x, y, u)$ är av formen $R_0(x, y) + R_1(x, y)u$. Vi antar att P , Q och R är C^1 -funktioner. Om $z = u(x, y)$ är en lösningsyta till (1), så är $\mathbf{n} = (u'_x, u'_y, -1)$ en normal till ytan. Låt $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vara vektorfältet

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r}), R(\mathbf{r})), \text{ där } \mathbf{r} = (x, y, z).$$

Då säger ekvation (1), helt enkelt att $\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} = 0$, dvs. \mathbf{F} ligger i tangentplanet till ytan i punkten (x, y, z) . Kurvor med \mathbf{F} som tangentvektor spelar en viktig roll vid lösandet av (1).

Definition. En karakteristik är en kurva vars tangent i varje punkt \mathbf{r} är parallell med $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Om karakteristikens ekvation i parameterform är $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, så är

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k(t)P(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = k(t)Q(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = k(t)R(x, y, z) \end{cases}$$

för någon kontinuerlig funktion $k(t) > 0$. Vi kan utan inskränkning anta att $k(t) = 1$, ty olika funktioner $k(t)$ motsvarar bara olika, men ekvivalenta, parametriseringar av kurvan. I ett område där P , Q och R är skilda från 0 kan karakteristikens differentialekvationer skrivas parameter-oberoende som

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Om t.ex. $R = 0$ fås i stället $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$ och $dz = 0$, dvs. $z = C$ (en konstant). Låt $\mathbf{a} = (a, b, c)$ vara en godtycklig punkt. Enligt teorin för ordinära differentialekvationer har systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y, z), & x(0) = a, \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z), & y(0) = b, \\ \frac{dz}{dt} = R(x, y, z), & z(0) = c, \end{cases} \quad (2)$$

*Några ändringar feb 2012.

en entydig lösning i någon omgivning av $t = 0$. Det finns alltså en entydig karakteristik som går genom \mathbf{a} . Enligt följande sats byggs en godtycklig lösningsyta $z = u(x, y)$ till (1) upp av karakteristiker.

Sats. Antag att $u(x, y)$ är en lösning till (1) och låt $\mathbf{a} = (a, b, c)$ där $c = u(a, b)$, vara en punkt i lösningsytan. Låt $(x(t), y(t), z(t))$ vara lösningen till (2) (karakteristiken genom \mathbf{a}). Då gäller att hela karakteristiken ligger i lösningsytan, dvs. $z(t) = u(x(t), y(t))$.

Bevis. Låt $X = X(t)$ och $Y = Y(t)$ vara lösningen till systemet

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = P(X, Y, u(X, Y)), & X(0) = a, \\ \frac{dY}{dt} = Q(X, Y, u(X, Y)), & Y(0) = b. \end{cases}$$

Sätt $Z(t) = u(X(t), Y(t))$. Då är (eftersom u satisfierar (1))

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= u'_x(X, Y)X'(t) + u'_y(X, Y)Y'(t) \\ &= u'_x(X, Y)P(X, Y, u(X, Y)) + u'_y(X, Y)Q(X, Y, u(X, Y)) \\ &= R(X, Y, u(X, Y)), \end{aligned}$$

och $Z(0) = u(a, b) = c$. Alltså satisfierar (X, Y, Z)

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = P(X, Y, Z), & X(0) = a, \\ \frac{dY}{dt} = Q(X, Y, Z), & Y(0) = b, \\ \frac{dZ}{dt} = R(X, Y, Z), & Z(0) = c, \end{cases}$$

och på grund av lösningens entydighet är därmed $x(t) = X(t)$, $y(t) = Y(t)$, $z(t) = Z(t)$. Det följer att $z(t) = u(x(t), y(t))$. ■

Ofta vill man lösa det s.k. Cauchy-problemet, dvs. man söker en lösning $z = u(x, y)$ sådan att lösningsytan innehåller en given kurva C . Låt C ha ekvationen $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s) = (x_0(s), y_0(s), z_0(s))$, och antag att tangentvektorn $\mathbf{r}'_0(s)$ inte är parallell med \mathbf{F} (C är inte en karakteristik). Bestäm för varje s karakteristiken genom $\mathbf{r}_0(s)$. Vi får då funktioner $x(s, t), y(s, t), z(s, t)$ sådana att

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = P(x, y, z), & x(s, 0) = x_0(s), \\ \frac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y, z), & y(s, 0) = y_0(s), \\ \frac{\partial z}{\partial t} = R(x, y, z), & z(s, 0) = z_0(s), \end{cases}$$

och $\mathbf{r} = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ är en parameterframställning av lösningsytan. Vi ser att ytan genereras av en enparametrisk skara av karakteristiker (s är parametern). Om s och t elimineras, kan vi skriva ytans ekvation på formen $z = u(x, y)$. Att vi verkligen har fått en lösningsyta till (1) kan inses på följande sätt. Tag en godtycklig punkt på ytan och bestäm det värde på s som hör till karakteristiken genom punkten. Om denna karakteristik har ekvationen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, så är $z(t) = u(x(t), y(t))$, och genom derivering fås

$$R = z' = u'_x x' + u'_y y' = P u'_x + Q u'_y$$

längs karakteristiken, och speciellt i den betraktade punkten. Ekvationen (1) gäller alltså för den konstruerade funktionen.

Man kan naturligtvis också lösa Cauchy-problemet genom att först bestämma ekvationens allmänna lösning. Vi skall ange ett par metoder att göra detta. Betrakta först fallet då P och Q är oberoende av u . Då studerar vi karakteristiskens projektion på xy -planet. Lös systemet (vi antar att P och Q är skilda från 0)

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)} \quad (3)$$

och skriv lösningen på formen $g(x, y) = C$, där C är en godtycklig konstant. Differentialekvationen (1) kan nu förenklas genom en variabelsubstitution; man sätter $s = g(x, y)$ och $t = h(x, y)$, där $h(x, y)$ är en C^1 -funktion vilken som helst sådan att detta är ett tillåtet variabelbyte. (Valet av $h(x, y)$ visar sig vara av underordnad betydelse; ofta kan man ta x eller y .) Då övergår (1) i

$$P\left(\frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial y}\right) = \left(P \frac{\partial g}{\partial x} + Q \frac{\partial g}{\partial y}\right) \frac{\partial u}{\partial s} + \left(P \frac{\partial h}{\partial x} + Q \frac{\partial h}{\partial y}\right) \frac{\partial u}{\partial t} = R.$$

Eftersom $g(x, y) = C$, är $0 = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx}$, och enligt (3) har vi $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$. Alltså är $P \frac{\partial g}{\partial x} + Q \frac{\partial g}{\partial y} = 0$, och ekvationen blir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{R}{P \frac{\partial h}{\partial x} + Q \frac{\partial h}{\partial y}}$$

Här är högerledet en känd funktion av s, t och u . Vi har alltså fått en ordinär differentialekvation för u i variabeln t . Specialfallet $R = 0$ (homogen ekvation) är särskilt enkelt. Då blir $u = f(s)$, där $f(s)$ är en godtycklig funktion. Lösningen i detta fall blir alltså $u(x, y) = f(g(x, y))$.

Exempel 1. Bestäm en lösning till $-x^2 u'_x + u'_y = 0$ sådan att lösningsytan innehåller halvlinjen $z = y, x = 1$.

Lösning 1. Karakteristikernas differentialekvation i xy -planet är

$$\frac{dx}{-x^2} = \frac{dy}{1},$$

vilket ger $\frac{1}{x} = y + C$, $g(x, y) = \frac{1}{x} - y = C$. Allmänna lösningen är enligt ovan $u(x, y) = f\left(\frac{1}{x} - y\right)$. Villkoret att $z = y, x = 1$ skall ligga i ytan ger $y = f(1 - y)$, dvs. $f(y) = 1 - y$, och lösningen blir

$$u(x, y) = 1 - \frac{1}{x} + y.$$

Lösning 2. Vi använder "parametermetoden" som beskrevs ovan. Parametrisera den givna kurvan:

$$x = 1, y = s, z = s, \quad s > 0.$$

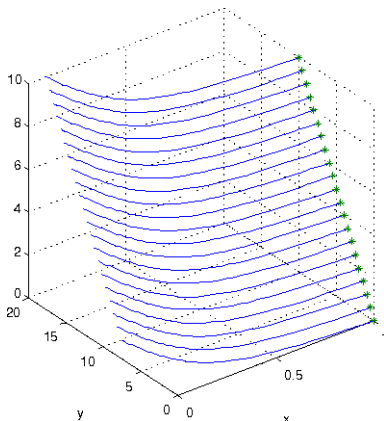
Bestäm karakteristiken:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P = -x^2, & x(s, 0) = 1, \\ \frac{dy}{dt} = Q = 1, & y(s, 0) = s, \\ \frac{dz}{dt} = 0, & z(s, 0) = s. \end{cases}$$

Första ekvationen ger $-\frac{dx}{x^2} = dt$, $\frac{1}{x} = t + C_1$. Villkoret för $t = 0$ ger $C_1 = 1$. Lösningen blir

$$x(s, t) = \frac{1}{t+1}, \quad y(s, t) = t+s, \quad z(s, t) = s.$$

Lös ut t och s : $t = \frac{1}{x} - 1$, $s = y - t = y - \frac{1}{x} + 1$, $z = s = y - \frac{1}{x} + 1$.



Figur 1: *Exempel 1*. Här ser vi några karakteristiker utritade. Begynnelsevärdet markeras med '*’.

Exempel 2. Lös $xyu'_x + xu'_y = y$, $x > 0$, $y > 0$.

Lösning. Karakteristikernas ekvation är

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{y}.$$

I xy -planet har vi $dx = ydy$, $x - \frac{1}{2}y^2 = C_1$. Sätt $s = x - \frac{1}{2}y^2$, $t = x$. Då är

$$xy\left(\frac{\partial u}{\partial s} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot 1\right) + x\left(\frac{\partial u}{\partial s} \cdot (-y) + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot 0\right) = y,$$

dvs. $xy\frac{\partial u}{\partial t} = y$, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x} = \frac{1}{t}$, $u = \ln t + f(s)$,

$$u(x, y) = \ln x + f\left(x - \frac{1}{2}y^2\right),$$

där f är en godtycklig C^1 -funktion. Alternativt kan man här bestämma karakteristiken ur $\frac{dx}{x} = dz$, dvs. $\ln x = z + C_2(s')$, där s' är parametern för en tänkt begynnelsekurva. Tillsammans med sambandet $x - \frac{1}{2}y^2 = C_1(s')$ enligt ovan får vi direkt (genom elimination av s') att $z = u(x, y) = \ln x + f\left(x - \frac{1}{2}y^2\right)$.

Återvänd till den allmänna kvasilinjära ekvationen (1). Lagrange angav följande metod för att bestämma en allmän lösning. Skriv lösningen till

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \quad (4)$$

på formen

$$g(x, y, z) = C_1, \quad h(x, y, z) = C_2. \quad (5)$$

Då ger $F(g(x, y, z), h(x, y, z)) = 0$ en lösning för varje C^1 -funktion $F(s, t)$. Ekvationen (5) ger en tvåparametrisk lösningsskara till (4), där varje lösningskurva framställs som skärningen mellan två ytor. Genom en relation av formen $F(C_1, C_2) = 0$ fås en enparametrisk skara av karakteristiker, och enligt ovan bör detta generera en lösningsyta $z = u(x, y)$. För en linjär, homogen ekvation (P och Q oberoende av u , $R = 0$) är ekvationen (4)

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}, \quad z = C_2.$$

Lösningen till den första ekvationen kan skrivas på formen $g(x, y) = C_1$, och enligt Lagranges metod ges den allmänna lösningen av $F(g(x, y), z) = 0$. Om z löses ut, blir lösningen av formen $z = f(g(x, y)) = u(x, y)$ som ovan.

Exempel 3. Lös $(y^2 - u^2)u'_x - xyu'_y = xu$, $x > 0$, $y > 0$. Bestäm den lösningsyta som innehåller halvlinjen $z = y = x > 0$.

Lösning. Karakteristikernas ekvation blir

$$\frac{dx}{y^2 - z^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{xz}. \quad (6)$$

Den sista likheten ger $-\ln y = \ln |z| - \ln C_1$, $g(x, y, z) = yz = C_1$. Det kan vara litet knepigare att hitta den andra funktionen $h(x, y, z)$ i (5). Här är ett sätt: Om det gemensamma värdet av kvoterna i (6) kallas ω , så är $dx = (y^2 - z^2)\omega$, $dy = -xy\omega$, $dz = xz\omega$, varför $xdx + ydy + zdz = (xy^2 - xz^2 - xy^2 + xz^2)\omega = 0$, så att $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. En allmän lösning till ekvationen fås ur $F(yz, x^2 + y^2 + z^2) = 0$. Vi kan också ansätta lösningen t.ex. på formen $yz = f(x^2 + y^2 + z^2)$, där $f(s)$ är en godtycklig C^1 -funktion definierad för $s > 0$. Vi vill att ekvationen satisfieras av $z = y = x > 0$, så vi vill ha $x^2 = f(3x^2)$ för $x > 0$. Alltså är $f(s) = \frac{s}{3}$ för $s > 0$, och lösningen fås ur $yz = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)$. Detta ger $z = \frac{3y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9y^2 - 4(x^2 + y^2)}$. För att $y = x > 0$ skall ge $z = x$ måste minustecknet väljas. Lösningen blir alltså

$$z = u(x, y) = \frac{1}{2} \left(3y - \sqrt{5y^2 - 4x^2} \right).$$