TAYLORS FORMEL I FLERVARIABELANALYS

Notation. Låt f, g vara reellvärda funktioner med samma definitionsmängd D (som är en delmängd till $\mathbb{R}^n$ om det är två funktioner av n variabler). Beteckningen $f = O(g)$ betyder att det finns en positiv konstant $C > 0$ sådan att $|f(\boldsymbol{x})| \leq C|g(\boldsymbol{x})|$ för alla $\boldsymbol{x} \in D$.

Taylors formel i envariabelanalys. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara $k + 1$ gånger differentierbar i en omgivning D av punkten $x = a$ och låt $h > 0$ vara tillräckligt liten sådan att $[a - h,\, a + h] \subseteq D$. Då gäller att

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}\, h^j + \frac{f^{k+1}(\xi))}{(k+1)!}\, h^{k+1}, \tag{0.1}$$

för något $\xi \in (a,\, a+h)$.

Om vi dessutom antar att $f \in \mathcal{C}^{k+1}$, dvs att dess $(k+1)$:te derivata är en kontinuerlig funktion, då är den $(k+1)$:te derivatan begränsad i varje sluten intervall[1]. Om vi då fixerar en sluten intervall I kring punkten a sä följer det från (0.1) att, för alla h sådan att $a + h \in I$,

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}\, h^j + O(h^{k+1}). \tag{0.2}$$

Summan i (0.2) är ett polynom av grad k i variabeln h och kallas för *Taylorpolynomet av grad k kring punkten $x = a$ för f*. Man betraktar då (0.2) som en approximation av f i närheten av $x = a$ med ett polynom av grad k och skriver

$$f(a+h) \approx \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}\, h^j. \tag{0.3}$$

Ekv. (0.3) kallas för *Taylorapproximationen av grad k till f i punkten $x = a$.*

Taylorapproximationen av grad 1 är vanlig linjärisering:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h, \quad f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + O(h^2). \tag{0.4}$$

Ofta vill man gå minst ett steg vidare och ta approximationen av grad 2:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2}\, h^2, \quad f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2}\, h^2 + O(h^3). \tag{0.5}$$

I synnerhet används (0.5) för att avgöra, vid en s.k. *kritisk/stationär* punkt till f, dvs en punkt där $f'(a) = 0$, vad för slags kritisk punkt det handlar om. Det följer direkt från (0.5) att

$f''(a) > 0 \Rightarrow x = a$ är ett lokalt minimum för f,
$f''(a) < 0 \Rightarrow x = a$ är ett lokalt maximum för f.

Om $f''(a) = 0$ så vet man inte ännu huruvida man har ett lokalt max, ett lokalt min eller en sadelpunkt. Man måste antingen gå längre ut i Taylorapproximationen eller använda någon annan kunskap man har om funktionen f för att avgöra frågan.

Vi vill nu utvidga dessa resultat till funktioner av flera variabler. För att underlätta med notationen så ska vi göra alla härledningarna för funktioner $f(x,\, y)$ av två vgariabler och bara indikera i slutet hur resultaten ser ut för ett godtyckligt antal variabler.

[1] Kom ihåg från tidigare analyskurser att en kontinuerlig funktion är begränsad på en kompakt mängd.

För att studera en funktion $f(x,\, y)$ i närheten av en baspunkt $(a,\, b)$, så använder vi följande trick som "reducerar" problemet till envariabelfallet. Fixera h, k och betrakta funktionen $F(t)$ av EN reell variabel t som ges av

$$F(t) = f(a + th,\, b + tk). \tag{0.6}$$

Antag för tillfället att f är tillräckligt snäll så att F kan Taylorutvecklas till vilken grad som helst - när härledningen är klar så kommer det att vara uppenbar vilka villkor som f måste uppfylla. Enligt (0.1) så ges Taylorutvecklingen av F av grad k i $t = 0$ av

$$F(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{F^{(j)}(0)}{j!}\, t^j + \frac{F^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}\, t^{k+1}, \quad \text{för något } \xi \in (0,\, t). \tag{0.7}$$

Det gäller nu att uttrycka derivatorna till F i termer av f:s partiella derivator. Sätt $g_1(t) = a+th$, $g_2(t) = b + tk$ och konstatera att $F(t) = f(g_1(t),\, g_2(t))$. Enligt kedjeregeln gäller alltså

$$F'(t) = f_x(a + th,\, b + tk) \cdot g_1'(t) + f_y(a + th,\, b + tk) \cdot g_2'(t) = (hf_x + kf_y)|_{(a+th,\, b+tk)}. \tag{0.8}$$

Notera att om $f \in \mathcal{C}^{k+1}$ så är HL av (0.8) i $\mathcal{C}^k$. Symboliskt kan vi skriva

$$F' = Df, \tag{0.9}$$

där $D : \mathcal{C}^{k+1} \to \mathcal{C}^k$ är en s.k. *differentialoperator*, nämligen

$$D = h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}. \tag{0.10}$$

Konstatera att (0.9) gäller för vilket som helst par $(f,\, F)$ som är relaterade enligt (0.6). Följdaktligen kan vi visa induktivt att, för varje j så gäller (så länge alla derivatorna finns)

$$F^{(j)}(t) = D^j f(a + th,\, b + tk), \quad \text{där } D^j = \left(h\tfrac{\partial}{\partial x} + k\tfrac{\partial}{\partial y}\right)^j. \tag{0.11}$$

Uttrycket för D^j kan utvecklas enligt binomialsatsen så länge operatorerna $\frac{\partial}{\partial x}$ och $\frac{\partial}{\partial y}$ *kommuterar*, m.a.o. så länge $f \in \mathcal{C}^j$ enligt Sats 2.5.9. Så om $f \in \mathcal{C}^j$ så har vi att

$$F^{(j)}(t) = \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} h^i k^{j-i} \frac{\partial^j}{\partial^i x\, \partial^{j-i} y}\right) f(a + th,\, b + tk). \tag{0.12}$$

Om man vill skriva detta mer kortfattat, en vanlig notation är att skriva

$$\boldsymbol{a} = (a,\, b), \quad \boldsymbol{h} = (h,\, k), \quad \boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\, \frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{0.13}$$

sådan att

$$D = h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\nabla}. \tag{0.14}$$

Då kan (0.11) också skrivas som

$$F^{(j)}(t) = (\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\nabla})^j f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}). \tag{0.15}$$

I synnerhet för $t = 0$ gäller

$$F^{(j)}(0) = (\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\nabla})^j f(\boldsymbol{a}). \tag{0.16}$$

Antag nu att $f \in \mathcal{C}^{k+1}$. Vi kan sätta (0.16) in i (0.7) för $j = 0, 1, \ldots, k$, sedan sätta $t = 1$ och eftersom $F(1) = f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h})$ så får vi att

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\nabla})^j}{j!}\, f(\boldsymbol{a}) + \frac{(\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\nabla})^{k+1}}{(k+1)!}\, f(\boldsymbol{\xi}), \tag{0.17}$$

för något $\boldsymbol{\xi}$ på raksträckan mellan $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}$. Eftersom $f \in \mathcal{C}^{k+1}$ så är alla dess partiella derivator av ordning $k + 1$ begränsade på denna raksträcka. Vi ser då att varje term i HL av (0.12) är, för $j = k + 1$, begränsad av en konstant gånger ett monom av grad $k + 1$ i h och k.

Detta begränsas i sin tur av en konstant gånger längden av vektorn $\boldsymbol{h}$. Så (0.17) kan skrivas i sin tur som

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\nabla})^j}{j!} f(\boldsymbol{a}) + O(||\boldsymbol{h}||^{k+1}). \tag{0.18}$$

Detta är Taylorapproximationen av grad $k+1$ för en funktion $f \in \mathcal{C}^{k+1}$ av två variabler. Samma formel gäller oavsett antalet variabler, med modifikationen att, om f beror av n variabler så ska (0.13) ersättas med

$$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n), \quad \boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_n), \quad \boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right). \tag{0.19}$$

För $k = 1$ så reduceras (0.18), med hjälp av binomialsatsen, till vanlig linjärisering av en differentierbar funktion:

$$f(a+h,\, b+k) = f(a,b) + (hf_x + kf_y)|_{(a,\,b)} + O(||\boldsymbol{h}||^2). \tag{0.20}$$

Viktigast därefter är Taylorapproximationen av grad 2, som för en funktion av två variabler lyder

$$f(a+h,\, b+k) = f(a,b) + (hf_x + kf_y)|_{(a,\,b)} + \frac{1}{2}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})|_{(a,\,b)} + O(||\boldsymbol{h}||^3). \tag{0.21}$$

Formel (0.21) är Sats 2.6.10 i PB. Dock ger inte PB den allmänna formeln (0.17)-(0.18).

Exempel. Bestäm Taylorapproximationen av grad 2 i punkten (1, 1) för funktionen $f(x, y) = x + y + \frac{8}{xy}$. Använd detta för att uppskatta $f(1.1, 0.9)$.

LÖSNING: Man kontrollerar lätt att

$$f_x = 1 - \frac{8}{yx^2}, \quad f_y = 1 - \frac{8}{xy^2}, \quad f_{xx} = \frac{16}{yx^3}, \quad f_{xy} = f_{yx} = \frac{8}{x^2y^2}, \quad f_{yy} = \frac{16}{xy^3} \tag{0.22}$$

och således är

$$f(1,\,1) = 10, \quad f_x(1,1) = f_y(1,\,1) = -7, \quad f_{xx}(1,\,1) = f_y(1,\,1) = 16, \quad f_{xy}(1,1) = 8. \tag{0.23}$$

Insättning in i (0.21) ger approximationen

$$f(1+h,\, 1+k) = 10 - 7(h+k) + 8(h^2 + hk + k^2) + O(||\boldsymbol{h}||^3). \tag{0.24}$$

Om vi tar $h = 0.1$, $k = -0.1$ och stryker feltermen så får vi uppskattningen

$$f(1.1,\, 0.9) \approx 10 - 7(0.1 - 0.1) + 8[(0.1)^2 + (0.1)(-0.1) + (0.1)^2] = 10.08. \tag{0.25}$$