Tentamen
MVE035 Flervariabelanalys F/TM

2017-08-22 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 0766377873 (alt. Ankn. 5325, Anna Rehammar)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 40% (20 poäng), inklusive eventuella bonuspoäng från Maple-TA uppgifterna och Matlab. Preliminärt så krävs 60% (30 poäng) för betyget 4 och 80% (40 poäng) för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 12 september. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s studieexpedition.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

Uppgifterna

1. (a) Förklara varför ekvationen (1p)

$$xy - z^2 = \frac{3xz}{y} \qquad ..... (*)$$

definierar z som en funktion $z = z(x, y)$ i en omgivning av punkten $(2, 2, -4)$.

(b) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan (*) i punkten $(2, 2, -4)$. (2p)

(c) Bestäm även $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ i samma punkt. (2.5p)

2. En C^2-funktion $f(x, y)$ sägs vara *harmonisk* om $f_{xx} + f_{yy} = 0$. Bevisa att om $f(x, y)$ är harmonisk, så också är $g(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$. (4.5p)

3. (a) Utan att beräkna några derivator, motivera varför funktionen $f(x, y) = xye^{-x^2-y^4}$ antar både ett globalt maximum och ett globalt minimum. (1p)

(b) Bestäm och klassificera alla kritiska punkter till f och bestäm f:s globala maximum och minimum värden. (3.5p)

Var god vänd!

4. Beräkna $\int_0^1 dx \int_x^{x^{1/3}} \frac{dy}{1-y^4}$. (3.5p)

(OBS! Du behöver inte motivera att integralen konvergerar).

5. Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ut genom den solida tetrahedern $T = \{(x,\, y,\, z) : x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, x + y + z \leq 3\}$

(a) dels direkt genom lämplig parametrisering av de olika delarna av randytan (tetrahedern) δT. (3p)

(b) dels med hjälp av Gauss sats. (3p)

6. Låt $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + (x^2 - y^2)\mathbf{k}$. Beräkna flödet av fältet curl($\mathbf{F}$) ut genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0$,

(a) dels direkt, dvs via beräkning av curl($\mathbf{F}$) och parametrisering av ytan (3p)

(b) dels med hjälp av Stokes sats. (3p)

7. Bevisa att för alla $t > 0$, (6p)

$$\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \arctan t.$$

(OBS! Du behöver ej motivera eventuell tillämpning av satser från boken).

8. Låt $f : D \to \mathbb{R}$ vara en funktion av två variabler, definierad på en domän $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

(a) Definiera vad som menas med att f är en C^1*-funktion*, resp. en *differentierbar* funktion. (2p)

(b) Bevisa att om f är C^1 då är den differenterbar. (5p)

9. (a) Formulera Greens sats i planet. (2p)

(b) Bevisa satsen för en axelparallell rektangel. (5p)

Lycka till!

Lösningar Flervariabelanalys F/TM, 170822

1. Sätt $F(x,\,y,\,z) := z^2 + \frac{3xz}{y} - xy$ och notera att ytan (*) är nivåytan $F(x,\,y,\,z) = 0$.

(a) $F_z = 2z + \frac{3x}{y}$, så i punkten $(2,\,2,\,-4)$ gäller $F_z = -5 \neq 0$. Detta innebär, enligt Implicita Funktionssatsen, att (*) definierar z som en funktion av x och y i en omgivning av denna punkt.

(b) Om $z = f(x,\,y)$ då gäller vidare, enligt Implicita Funktionssatsen, att

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{y - \frac{3x}{y}}{2z + \frac{3x}{y}} \overset{(2,2,-4)}{=} -\frac{8}{5},$$
$$f_y = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{\frac{3xz}{y^2} + x}{2z + \frac{3x}{y}} \overset{(2,2,-4)}{=} \frac{4}{5}.$$

Så tangentplanet ges av

$$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) \Rightarrow \cdots \Rightarrow 8x - 4y + 5z + 12 = 0.$$

(c) Sammanfattningsvis har vi från (b) att

$$F_x = \frac{3z}{y} - y, \quad F_z = 2z + \frac{3x}{y}, \tag{1}$$

och i punkten $(2,\,2,\,-4)$ att

$$F_x = -8, \quad F_z = -5, \quad f_x = -\frac{8}{5}. \tag{2}$$

Nu har vi, enligt kvotregeln,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_x}{F_z}\right) =$$
$$= \frac{F_x \frac{\partial F_z}{\partial x} - F_z \frac{\partial F_x}{\partial x}}{(F_z)^2} = \frac{5\frac{\partial F_x}{\partial x} - 8\frac{\partial F_z}{\partial x}}{25}.$$

Vidare från (1) och (2) gäller

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{3}{y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{y} f_x \overset{(2,2,-4)}{=} -\frac{12}{5},$$
$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = 2\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{3}{y} = 2f_x + \frac{3}{y} \overset{(2,2,-4)}{=} -\frac{17}{10}.$$

Alltså gäller

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{5\left(-\frac{12}{5}\right) - 8\left(-\frac{17}{10}\right)}{25} = \cdots = \frac{8}{125}.$$

2. Sätt $u = u(x,\,y) = x^2 - y^2$, $v = v(x,\,y) = 2xy$. Så $g(x,\,y) = f(u,\,v)$. Enligt kedjeregeln har vi först

$$g_x = g_u u_x + g_v v_x = 2(x f_u + y f_v), \tag{3}$$
$$g_y = g_u u_y + g_v v_y = 2(x f_v - y f_u). \tag{4}$$

Derivera (3) en gång till m.a.p. x med hjälp av både kedjeregeln och produktregeln:

$$g_{xx} = 2\left[x\frac{\partial f_u}{\partial x} + f_u \cdot 1 + y\frac{\partial f_v}{\partial x}\right]$$
$$= 2\left[x\left(\frac{\partial f_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + f_u + y\left(\frac{\partial f_v}{\partial u}\partial u \partial x + \frac{\partial f_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$
$$= 2\left[x(f_{uu}(2x) + f_{uv}(2y)) + f_u + y(f_{vu}(2x) + f_{vv}(2y))\right]$$
$$\overset{f_{uv} = f_{vu}}{=} \cdots = 2f_u + 4(x^2 f_{uu} + xy f_{uv} + y^2 f_{vv}).$$

Om vi deriverar (4) igen m.a.p. y så får vi, efter en liknande beräkning,

$$g_{yy} = -2f_u + 4(y^2 f_{uu} - xyf_{uv} + x^2 f_{vv}).$$

Därför gäller

$$g_{xx} + g_{yy} = 4(x^2 + y^2)(f_{uu} + f_{vv}).$$

Men f är harmonisk så $f_{uu} + f_{vv} = 0$ och därmed är också $g_{xx} + g_{yy} = 0$, v.s.v.

3. (a) f är uppenbarligen definierad i hela planet och kontinuerlig. Pga den negativa exponentialen så är det också uppenbart att $f \to 0$ då $||(x,\, y)|| \to \infty$. Slutligen antar f både positiva och negativa värden: $f(-x,\, y) = f(x,\, -y) = -f(x,\, y)$. Så f måste anta både ett globalt max och ett globalt min, och dessa antas inom någon sluten skiva kring origo.

(b) Vi har

$$\begin{aligned} f_x &= e^{-x^2-y^4}[y + xy(-2x)] = e^{-x^2-y^4} y(1-2x^2), \\ f_y &= e^{-x^2-y^4}[x + xy)(-4y^3)] = e^{-x^2-y^4} x(1-4y^4). \end{aligned}$$

I en kritisk punkt gäller

$$\begin{aligned} f_x = 0 &\Leftrightarrow y(1-2x^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ eller } x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ f_y = 0 &\Leftrightarrow x(1-4y^4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Detta innebär att det finns fem kritiska punkter: $(0,\, 0)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

För klassificiering så skulle vi kunna pyssla med andra derivator men det behövs ej. Kom ihåg från ovan att f är en udda funktion, dvs $f(-x,\, y) = f(x,\, -y) = -f(x,\, y) = -f(-x,\, -y)$. Det betyder att f antar positiva värden i de 1:a och 3:e kvadranterna och negativa värden i de 2:a och 4:e kvadranterna. I synnerhet innebär detta att både positiva och negativa värden antas godtykligt nära origo, och eftersom $f(0,\, 0) = 0$ så måste origo vara en sadelpunkt.

Slutligen har vi att den globala max är $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$, medan att den globala min är $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$.

4. Integrationsområdet ges på formen $D = \{(x,\, y) : 0 \le x \le 1,\, x \le y \le \sqrt[3]{x}\}$. Det kan lika väl ges som $D = \{(x,\, y) : 0 \le y \le 1,\, y^3 \le x \le y\}$. Så vi byter integrationsordning och räknar:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dx \int_x^{x^{1/3}} \frac{dy}{1-y^4} = \int_0^1 \frac{dy}{1-y^4} \int_{y^3}^{y} dx = \int_0^1 \frac{y-y^3}{1-y^4}\, dy = \\ &= \int_0^1 \frac{y(1-y^2)}{(1-y^2)(1+y^2)}\, dy = \int_0^1 \frac{y}{1+y^2}\, dy = \frac{1}{2}\ln(1+y^2)|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

5. (a) Tetrahedern δT har fyra sidor:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,\, y,\, 0) : x \ge 0,\, y \ge 0,\, x + y \le 3\}, \\ S_2 &= \{(x,\, 0,\, z) : x \ge 0,\, z \ge 0,\, x + z \le 3\}, \\ S_3 &= \{(0,\, y,\, z) : y \ge 0,\, z \ge 0,\, y + z \le 3\}, \\ S_4 &= \{(x,\, y,\, z) : x \ge 0,\, y \ge 0,\, z \ge 0, x + y + z = 3\}. \end{aligned}$$

På S_1 är $\hat{\mathbf{N}} = (0,\, 0,\, -1)$ och $\mathbf{F} = (x^2,\, y^2,\, 0)$ så $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \equiv 0$ och $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0$. Liknande resonemang leder till att också $\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0$.

S_4 är en del av funktionsytan $z = f(x, y) = 3 - x - y$. Notera att $\pi(S_4) = S_1$, där π betecknar projektion på xy-planet. Vi har $\hat{\mathbf{N}}\, dS = \pm(-f_x, -f_y, 1)\, dx\, dy = \pm(1, 1, 1)\, dx\, dy$. Tydligen ges den utåtgående normalen av + tecknet. Således är

$$\iint_{S_4} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{S_1} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy\, [x^2 + y^2 + (3 - x - y)^2] =$$

$$= \int_0^3 dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} - \frac{(3 - x - y)^3}{3} \right]_0^{3-x} = \cdots = \int_0^3 \left(x^2(3 - x) + \frac{2}{3}(3 - x)^3 \right) dx.$$

Det underlättar att notera att, av symmetriskäl, $\int_0^3 (3 - x)^3\, dx = \int_0^3 x^3\, dx$. Alltså,

$$\iint_{S_4} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \int_0^3 \left(x^2(3 - x) + \frac{2}{3}x^3 \right) dx = \int_0^3 \left(3x^2 - \frac{x^3}{3} \right) dx =$$

$$= \left[x^3 - \frac{x^4}{12} \right]_0^3 = 27 - \frac{81}{12} = \frac{81}{4}.$$

(b) Gauss sats säger att

$$\iint_{\delta T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV.$$

Vi har $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2(x + y + z)$. Låt oss för skojs skull beräkna trippelintegralen med hjälp av nivåytor:

$$\iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = 2 \iiint_T (x + y + z)\, dV = 2 \int_0^3 uV'(u)\, du, \tag{5}$$

där

$$V(u) = \mathrm{vol}(\{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq u\}).$$

Man har

$$V(u) = \int_0^u dz \int_0^{u-z} dy \int_0^{u-z-y} dx = \int_0^u dz \int_0^{u-z} (u - z - y)\, dy =$$

$$= \int_0^u dz \left[-\frac{(u - z - y)^2}{2} \right]_0^{u-z} = \int_0^u \frac{(u - z)^2}{2}\, dz =$$

$$= \int_0^u \frac{z^2}{2}\, dz = \frac{u^3}{6}.$$

Så $V(u) = \frac{u^3}{6}$ och således är $V'(u) = \frac{u^2}{2}$. Insättning in i (5) ger

$$\iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = 2 \int_0^3 u \left(\frac{u^2}{2} \right) du = \int_0^3 u^3\, du = \cdots = \frac{81}{4}.$$

6. (a) Kalla halvsfären för $\mathcal{S}$. Notera att, pga dess symmetri, så är

$$\iint_{\mathcal{S}} xy\, dS = \iint_{\mathcal{S}} xz\, dS = \iint_{\mathcal{S}} yz\, dS = 0, \tag{6}$$

och

$$\iint_{\mathcal{S}} x^2\, dS = \iint_{\mathcal{S}} y^2\, dS = \iint_{\mathcal{S}} z^2\, dS. \tag{7}$$

Vi beräknar först

$$\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -2xz & x^2 - y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}[-2y - (-2x)] - \mathbf{j}[2x - 0] + \mathbf{k}[-2z - 3] = (2x - 2y, -2x, -2z - 3).$$

På sfären, som har radie 2 och centrum i origo, gäller $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||} = \frac{1}{2}(x,\, y,\, z)$. Så

$$\operatorname{curl}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{2}(2x^2 - 4xy - 2z^2 - 3z).$$

När vi sedan integrerar över $\mathcal{S}$ så ser vi, med hjälp av (6) och (7), att det enda som överlever är $\frac{1}{2} \iint_{\mathcal{S}} -3z\, dS$. Men S är en del av den implicta funktionsytan $F(x,\, y,\, z) = 4$, där $F(x,\, y,\, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Så

$$dS = \left| \frac{\nabla F}{F_z} \right| dx\, dy = \left| \frac{(2x,\, 2y,\, 2z)}{2z} \right| dx\, dy = \frac{||(x,\, y,\, z)||}{z}\, dx\, dy = \frac{2}{z}\, dx\, dy.$$

Så

$$\frac{1}{2} \iint_{\mathcal{S}} -3z\, dS = -3 \iint_{\pi(\mathcal{S})} dx\, dy = -3 \times \operatorname{Area}(\pi(\mathcal{S})).$$

Men projektionen på xy-planet är just cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$, vars area är $\pi(2^2) = 4\pi$. Vi drar slutsatsen att $\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = -12\pi$.

(b) Randen till $\mathcal{S}$ är cirkeln $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, alltså en cirkel av radie 2 kring origo i xy-planet. Kalla denna kurva för γ. Då γ genomlöps moturs så ligger $\mathcal{S}$ till vänster. Den utåtgående normalen på $\mathcal{S}$ har en positiv z-komponent. Allt detta innebär, enligt Stokes sats, att

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Den naturliga parametriseringen av γ är $\mathbf{r}(t) = (2\cos t,\, 2\sin t,\, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Vi har då

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (6\sin t,\, 0,\, 4\cos^2 t - 4\sin^2 t) \cdot (-2\sin t,\, 2\cos t,\, 0)\, dt =$$

$$= -12 \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = -12 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\, dt = \cdots = -12\pi.$$

7. Jag stal det här från nätet (!). Se avsnitt 3 i följande dokument:

`http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/diffunderint.pdf`

8. (a) Se Definitioner 2 och 3 i Kapitel 2 i kursboken.

(b) Se Sats 3 i Kapitel 2 i kursboken.

9. Se Sats 1 i Kapitel 9 i kursboken. Där bevisas satsen för något mer allmänt än en axelparallell rektangel, så det beviset är godtagbart.