Tavelpresentation i Flervariabelanalys

Chalmers Tekniska Högskola, MVE035

Ammie, Blomberg, `ammie@student.chalmers.se`

Jonathan, Sargent, `sargent@student.chalmers.se`

Linus, Sundberg, `sulinus@student.chalmers.se`

Madeleine, Karlsson, `madk@student.chalmers.se`

Nils, Patriksson, `panils@student.chalmers.se`

27 februari 2018

1 Definitioner angående kurvor

Def: En kurva $\mathbf{r}$(t) där t går mellan α och β är <u>enkel</u> då $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ då $\alpha \leq t_1 \leq t_2 \leq \beta$ och <u>sluten</u> om $\mathbf{r}(\alpha)$=$\mathbf{r}(\beta)$.

1.1 Jordan Curve Theorem

γ är en enkel och sluten kurva i planet. $\mathbf{R}^2\backslash\gamma$ består av två sammanhängande komponenter. En insida som är begränsad och en utsida som är obegränsad.

Def: γ - en enkel och sluten kurva i $\mathbf{R}^2$. γ genomlöps moturs om insidan är till vänster om färdriktningen. Genomlöps kurvan medurs är insidan till höger om färdriktningen. Standard är moturs och kallas då positivt orienterad.

2 Greens formel

2.1 Definition av positiv orientering

Låt D vara ett område i planet vars rand består av en eller flera enkla slutna kurvor. Randen sägs vara positivt orienterad om varje randkurva orienteras sådant att D ligger till vänster om färdriktningen.

2.2 Definition av enkelt sammanhängande delmängd

En delmängd $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ sägs vara enkelt sammanhängande om det är sammanhängande och insidan till varje enkel sluten kurva i Ω ligger helt och hållet i Ω.

2.3 Sats 9.2.1, Greens formel

Låt P och Q vara två C^1-funktioner i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$. Om det kompakta delområdet D av Ω har en rand ∂D som utgörs av en eller flera styckvis C^1-kurvor och som är positivt orienterade så gäller att

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{1}$$

2.4 Tillämpningar av Greens formel

2.5 Areaberäkningar

Arean av ett plant område D kan beräknas med följande formler, där $\mu(D)$ betyder arean av D.

$$\mu(D) = \oint_{\partial D} -y\,dx = \oint_{\partial D} x\,dy = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} -y\,dx + x\,dy$$

3 Konservativa fält och Potentialer

3.1 Definition

Antag $\exists$ vektorfält $\mathbf{F}$ och skalärfält $V : \nabla V = \mathbf{F}$. Då säger vi att $\mathbf{F}$ är ett Konservativt fält samt att V är dess en av dess potentialer.

3.2 Egenskaper hos konservativa fält och deras potentialer

Om vi vill integrera $\mathbf{F}$, längs en kurva, mellan startpunkt $\vec{a}$ och slutpunkt $\vec{b}$ kan man använda satsen 9.4.2 i boken. **Antag:** $\mathbf{F}$ är ett potentialfält med potential V över det öppna området $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$.

$$\longrightarrow \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = V(\vec{b}) - V(\vec{a}) \tag{2}$$

Vilket leder till att om man har en sluten kurva γ_s gäller:

$$\oint_{\gamma_s} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{3}$$

3.3 Sats 9.4.5

Om $\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett C^1-vektorfält som uppfyller $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i ett enkelt sammanhängande område Ω, då har $\mathbf{F}$ en potential i Ω. Detta kan jämföras med högerled i Greens formel (1), samt resultatet härlett från ekvation (4).

3.4 Sats 9.4.3

Om det gäller att för alla slutna kurvor γ_s på ett öppet område $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ så är

$$\oint_{\gamma_s} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{4}$$

så är det ekvivalent med att alla kurvintegraler på Ω är oberoende av vägen.

3.5 Tillämpningar konservativa fält, potentialer och kurvintegraler

Det finns många mycket kraftfulla tillämpningar för kunskapen om konservativa fält. Då flera fält från fysiken är konservativa så kan man förenkla många beräkningar. Till exempel kan arbetet utfört på en partikel som rör sig i en bana betraktas endast i förhållande till start och slutpunkt vilket gör beräkningar mycket lättare. Här följer några exempel på slutsatser som man kan dra med hjälp av potentialer:

- Newtons gravitationslag. Enligt lagen så är $\mathbf{F(r)} = -G \cdot M \cdot m \cdot \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$, där $\mathbf{F(r)}$ är kraften beroende på radien och allt annat konstanter.
  $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Sätter man nu potentialen till $V(\mathbf{r}) = \frac{C}{\|\mathbf{r}\|}$, då $C = GMm$, så får man att

  $$\nabla V(\mathbf{r}) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \mathbf{F(r)} \tag{5}$$

  vilket ger att fältet är konservativt.

- Coulombs lag (elektrostatik). På samma sätt som gravitationskraften, enligt Newtons gravitationslag, är konservativ så är också, den elektrostatiska kraften, enligt Coulombs lag, det ty den kan omformuleras till en formel med sammaradieberoende som i Newtons gravitationslag. Detta ger att även detta fält är konservativt.

- Arbete och kinetisk energi. Arbetet $U = \Delta K$ där K är den kinetiska energin. Detta kan härledas med hjälp av ett intressant lemma, nämnligen att:

  $$\frac{d}{dt}(v(t) \cdot \omega(t)) = v'(t) \cdot \omega(t) + v(t) \cdot \omega'(t) \tag{6}$$

4 Vektoranalys i 3 dimensioner

Till en början definierade vi vad divergensen för ett tredimensionellt vektorfält är. Detta kan skrivas på två sätt: div($\boldsymbol{F}$) eller $\nabla \bullet \boldsymbol{F}$. Om $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, där F_1, F_2, F_3 alla är C^1-funktioner, så är $\nabla \bullet \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$. Sedan definierades även vad som menas med $\nabla \times \boldsymbol{F}$, där $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är ett C^1-fält.
Då definieras $\nabla \times \boldsymbol{F}$ som

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) \tag{7}$$

Två andra vanliga beteckningar är curl($\boldsymbol{F}$) samt rot($\boldsymbol{F}$).

Dessa två operatorer gör det smidigare att göra en utvidgning av den tidigare tvådimensionella vektoranalysen till tredimensionell vektoranalys.

4.1 Flödesintegraler

Likt att det finns kurvintegraler i 2-D vektoranalys finns det även kurvintegraler i 3-D vektoranalys. (Det finns även något som kallas flödesintegraler i den tredimensionella vektoranalysen). Dessa definieras på följande sätt:

$$\iint_Y \boldsymbol{F} \bullet \hat{N} dS \tag{8}$$

där $\hat{N}$ är en utåtgående enhetsnormal till ytan Y, $\boldsymbol{F}$ är ett 3-dimensionellt vektorfält och dS är ett infinitesimalt area segment av ytan Y. Den här integralen kan tänkas på som att den beräknar hur mycket av $\boldsymbol{F}$s flöde går ut genom det infinitesimala areasegmentet som sedan summeras över hela Y.

Det uppstår naturligt en fråga om beräkningar av både flödes- och kurvintegraler i 3-D, nämligen kan de göras på något annat sätt? Ty de ofta kan bli långa uträkningar. Svaret på den frågan är ibland, vilket leder till två satser. Gauss divergenssats och Stokes sats.

4.2 Gauss divergenssats

Låt $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett c^1-vektorfält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^3$. Om det kompakta området $K \subseteq \Omega$ har en rand ∂K som består av en eller flera C^1-ytor, och som är orienterade med utåtriktad normal, så gäller att:

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial K} \boldsymbol{F} \bullet \hat{N} dS = \iiint_K \nabla \bullet \boldsymbol{F} dV. \tag{9}$$

Ett viktigt kriterium vid användning av denna sats är att ytan som integreras över är sluten samt att $\hat{N}$ är enhetsnormalvektorn som hela tiden pekar ut från ytan.