MVE035 - veckosammanfattning

Ludvig Björk (bjorklu), Joakim Stjern
Hampus Ahlebrand, Johan Wikström (johwiks)
Vidar Höök, Henrik Häggström(henhagg)

22 mars 2018

1 Gauss' sats, 10.2.1

Låt Ω vara vara en öppen mängd och K vara en kompakt mängd där $\Omega, K \in \mathbf{R}^3$ och $K \subseteq \Omega$. Randytan till K som vi kallar ∂K ska kunna delas upp i ett ändligt antal C^1 ytor.

Vidare låter vi $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett C^1-fält definierat i Ω. Vektorfältet $\mathbf{u}$ kommer att flöda genom randytan ∂K och därmed kommer det finnas ett nettoflöde genom ytan. Det är rimligt att nettoflödet har att göra med källorna inuti K, det vill säga hur mycket varje litet område inne kroppen producerar. Ifall alla källor inuti K adderas borde man kunna säga något om flödet ut eller in, vilket är precis vad Gauss sats gör.

$$\iint_{\partial K} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_K (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV \tag{1}$$

I vänsterledet har vi flödesintegralen överytan ∂K. Detta är en en flödesintegral eftersom integranden är fältet $\mathbf{u}$:s flöde genom en liten yta (dS) som tillhör ∂K. Till ∂K har vi normalen $\mathbf{N}$ orienterad sådan att den är riktad ut från K. I högerledet har vi trippelintegralen av divergensen inuti K, alltså adderas alla källor i kroppen.

2 Stokes' sats, 10.3

Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett C^1-fält definierat i en öppen mängd Ω i rummet. Om Y är ett orienterat ytstycke i Ω med orienterad rand ∂Y så gäller att:

$$\oint_{\partial Y} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y rot(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{N}\, dS$$

Att Y är ett orienterat ytstycke med orienterad rand ∂Y betyder att normalen $\mathbf{N}$ till Y och tangenten $\mathbf{T}$ till ∂Y förhåller sig på så sätt att kryssprodukten $\mathbf{N} \times \mathbf{T}$ pekar in mot ytan.

Anm: $\text{rot}(\mathbf{u}) = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \mathrm{u}_3 \end{vmatrix}$

2.1 Virvelfria vektorfält

Ett användbart begrepp för vektorfält är egenskapen virvelfritt.

Definition. *Låt* $\mathbf{F}$ *vara ett* C^1*-vektorfält definierat i ett öppet område* Ω *i* $\mathbf{R}^3$*. Vektorfältet kallas* ***virvelfritt*** *om* $\nabla \times \mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$ *i hela* Ω*.*

2.2 Sats 10.5.3

Sats 10.5.3. *Låt* $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbf{R}^3$ *vara ett* C^1*-fält, där* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ *är ett öppet område. Om fältet* $\mathbf{F}$ *är konservativt så är det också virvelfritt.*

Notera att det omvända inte är sant i allmänhet, det vill säga egenskapen virvelfritt medför inte att fältet har en potential. Det givna exemplet för detta är magnetfältet $\mathbf{B}(x, y, z)$. Det gäller att $\nabla \times \mathbf{B} \equiv \mathbf{0}$ i hela dess definitionsmängd, men samtidigt är magnetfältet inte konservativt i varje godtyckligt område i $\mathbf{R}^3$.

Satsen är dock användbar för att kontrollera om ett vektorfält har en potential eller inte. Om rotationen av $\mathbf{F}$ är nollskild någonstans i det betraktade området är $\mathbf{F}$ inte heller konservativ.

2.3 Enkelt sammanhängande områden

En relevant fråga är om något krav kan ställas på området Ω så att det går att avgöra om ett virvelfritt fält är konservativt. För att göra detta introduceras ett nytt begrepp.

Definition. *En delmängd* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ *kallas* ***enkelt sammanhängande*** *om varje enkel sluten kurva i* Ω *kan kontinuerligt deformeras till en enda punkt, utan att lämna området* Ω*.*

2.4 Sats 10.5.4

Efter att ha definierat ***öppet och enkelt sammanhängande områden*** och ***virvelfritt*** kan vi nu gå vidare och formulera en sats.

Sats 10.5.4. *Om vektorfältet* $\mathbf{F}$ *är* ***virvelfritt*** *i ett* ***öppet och enkelt sammanhängande område*** *D i* $\mathbf{R}^3$ *så har* $\mathbf{F}$ *en potential i D.*

För att ett område ska ha en potential krävs att kurvintegralen

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

för varje enkel sluten kurva γ i D, oberoende av vägen. Vi kan visa detta genom att ta randen ∂Y av en yta Y i D. Då följer enligt Stokes' sats att

$$\oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{Y} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS.$$

Vi vet genom definitionen av ***virvelfritt*** att

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0$$

och därmed följer att

$$\oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{Y} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS = 0.$$

3 Nablaräkning

3.1 Nablaoperatorn

För att underlätta räkningen visar sig den så kallade nablaoperatorn, med beteckningen ∇ användbar.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \tag{2}$$

Det finns två sätt som ∇ kan verka på ett vektorfält $\mathbf{F}$. Det första är skalärprodukt ,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + ... \tag{3}$$

som ger tillbaka ett skalärfält. Det är detta som benämns som divergensen av $\mathbf{F}$. Det andra är kryssprodukt,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \mathrm{F}_1 & \mathrm{F}_2 & \mathrm{F}_3 \end{vmatrix}$$

som ger ett nytt vektorfält som benämns som rotationen av $\mathbf{F}$. Per definition sägs ett C^1-fält $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara källfritt om $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Det gäller då att om $\mathbf{F}$ är ett godtyckligt C^2-fält så är $\mathrm{rot}(\mathbf{F})$ källfritt.

3.2 Laplaceoperatorn

Genom att beräkna divergensen av vektorfältet grad f för en godtycklig reellvärd funktion f erhålles uttrycket $\mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = (\nabla \cdot \nabla) f$. Operatorn $\nabla \cdot \nabla = \Delta$ brukar kallas för Laplaceoperatorn.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{4}$$

Detta kan i symbolspråk uttryckas $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \Delta$.

4 Optimering på kompakta områden, 4.1

Optimering på kompakt område innebär att söka max/min-värden för en viss kontinuerlig reell-värd funktion definierad på ett slutet och begränsat område.

4.1 Sats 1.4

Sats 1.4. *Låt $K \subseteq \mathbf{R}^n$ vara en kompakt mängd.*
Om $f : K \to \mathbf{R}$ är en kontinuerlig funktion, så antar f både ett max- och ett minvärde på K.

4.2 Grundläggande problemställning

Givet:
$K \subseteq \mathbf{R}^n$ kompakt, $f : K \to \mathbf{R}$ kontinuerlig.
Uppgift:
Bestäm f:s max- och minvärden på K.

4.3 Algoritm

I. Bestäm alla stationära punkter till f inom K

II. Bestäm största och minsta värde på randen av K

III. Beräkna och jämför värdena i alla framtagna punkter

Noterbart är att algoritmen är rekursiv för randen till K. Om exempelvis $n = 2$ så består randen av C^1-kurvor. Detta innebär följaktligen att vi för randen i detta fall kan använda algoritmen som för $n = 1$. Om istället $n = 3$ från början så består randen istället av C^1-yta och då används algoritmen som för $n = 2$.