MVE035, VT-18: BEVIS AV SATS 2.3.4 FÖR GODTYCKLIGT $n \in \mathbb{N}$

Sats. *Låt* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *vara en differentierbar funktion av* n *variabler,* $f = f(x_1, \ldots, x_n)$*, och låt* $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vara differentierbara funktioner av den reella variabeln* t*. Då gäller att sammansättningen* $f(g_1(t), \ldots, g_n(t))$ *är en differentierbar funktion av* t *och*

$$\frac{d}{dt} f(g_1(t), \ldots, g_n(t)) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p}(g_1(t), \ldots, g_n(t)) \, \frac{dg_p}{dt}. \tag{0.1}$$

Bevis: Sätt

$$F(t) = f(g_1(t), \ldots, g_n(t)) \tag{0.2}$$

och låt $a \in \mathbb{R}$. Vi måste visa att F är differentierbar i $x = a$, dvs att gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \tag{0.3}$$

existerar, och att den är lika med

$$F'(a) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p}(g_1(a), \ldots, g_n(a)) \, \frac{dg_p}{dt}(a). \tag{0.4}$$

Per definition så är

$$F(a+h) = f(g_1(a+h), \ldots, g_n(a+h)). \tag{0.5}$$

Eftersom varje g_p är differentierbar så kan de alla linjäriseras kring $x = a$, alltså

$$g_p(a+h) = g_p(a) + h \cdot \frac{dg_p}{dt}(a) + h \cdot \rho_p(h), \quad \text{där } \forall\, p,\ \rho_p(h) \to 0 \text{ då } h \to 0. \tag{0.6}$$

Sätt

$$\boldsymbol{a} := (g_1(a), \ldots, g_n(a)), \tag{0.7}$$

$$\boldsymbol{h} := h \cdot \left(\frac{dg_1}{dt}(a), \ldots, \frac{dg_n}{dt}(a) \right) + h \cdot (\rho_1(h), \ldots, \rho_n(h)). \tag{0.8}$$

Då gäller att

$$F(a+h) - F(a) = f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}). \tag{0.9}$$

Men f är differentierbar så

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{h} \cdot \nabla f(\boldsymbol{a}) + ||\boldsymbol{h}|| \cdot \rho(\boldsymbol{h}), \quad \text{där } \rho(\boldsymbol{h}) \to 0 \text{ då } \boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}. \tag{0.10}$$

Notera nu att

(0.11)

$$\boldsymbol{h} \cdot \nabla f(\boldsymbol{a}) = h \cdot \left[\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p}(g_1(a), \ldots, g_n(a)) \, \frac{dg_p}{dt}(a) \right] + h \cdot \left[\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p}(g_1(a), \ldots, g_n(a)) \, \rho_p(h) \right]$$

och

$$||\boldsymbol{h}|| = |h| \cdot \sqrt{\sum_{p=1}^{n} \left(\frac{dg_p}{dt}(a) + \rho_p(h) \right)^2}. \tag{0.12}$$

Således är

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p}(g_1(a),\, \dots, g_n(a))\, \frac{dg_p}{dt}(a) +$$

$$+\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p}(g_1(a),\, \dots, g_n(a)) \cdot \rho_p(h) + \frac{|h|}{h}\, \rho(\boldsymbol{h}) \sqrt{\sum_{p=1}^{n} \left(\frac{dg_p}{dt}(a) + \rho_p(h) \right)^2}. \tag{0.13}$$

Första summan i HL av (0.13) är oberoende av h och överensstämmer med HL av (0.4). Så det räcker att bevisa att de övriga termerna i HL av (0.13) går mot noll då $h \to 0$.

När det gäller den andra summan så har vi redan konstaterat i (0.6) att $\rho_p(h) \to 0$ då $h \to 0$, för varje p. Således går summan mot noll, ty koefficienterna är bara de partiella derivatorna till f i en fixt punkt, alltså är konstanter.

När det gäller den tredje termen så kan vi konstatera att

(i) $|h|/h = \pm 1$,
(ii) det är klart från (0.8) att $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$ då $h \to 0$ och således går $\rho(\boldsymbol{h})$ mot noll då $h \to 0$, enligt (0.10),
(iii) eftersom $\rho_p(h) \to 0\ \forall\, p$ så går summan mot det konstanta värdet $\sqrt{\sum_{p=1}^{n} \left(\frac{dg_p}{dt}(a)\right)^2}$.

Således går den tredje termen i HL av (0.13) mot noll också då $h \to 0$ och beviset är klart.