Tentamen
MVE035 Flervariabelanalys F/TM

2018-08-28 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Jonatan Kallus, telefon: 5325 (alt. Peter Hegarty 070-5705475)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 40% (20 poäng), inklusive eventuella bonuspoäng erhållna under VT-2018 från Maple-TA uppgifterna och Matlab. Preliminärt så krävs 60% (30 poäng) för betyget 4 och 80% (40 poäng) för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 18 september. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s studieexpedition.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.
I uppgifter 3 och 4 så är de olika deluppgifterna helt oberoende av varandra.

Uppgifterna

1. Låt
$$f(x,\,y,\,z) = x^2e^{yz} + \frac{y^2 - z^2}{x}, \qquad g(x,\,y) = +\sqrt{2x^3 + y} - 2.$$

(a) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $f(x,\,y,\,z) = 5$ i punkten $(1,\,2,\,0)$. (1.5p)

(b) Bestäm en riktningsvektor för tangentlinjen till skärningskurvan mellan ytorna $f(x,\,y,\,z) = 5$ och $z = g(x,\,y)$ i punkten $(1,\,2,\,0)$. (1.5p)

(c) Bestäm Taylorpolynomet $P(h,\,k)$ av grad 2 till $g(x,\,y)$ i punkten $(1,\,2)$. (1.5p)

(d) Antag att (2.5p)
$$x = x(s,\,t) = \sin(s^2 + t^2), \quad y = y(s,\,t) = \cos(st).$$
Använd kedjeregeln för att beräkna $\frac{\partial g}{\partial s}$ och $\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}$. Du kan lämna svaren i termer av $x,\,y,\,s,\,t$ och behöver ej förenkla.
(Obs! Man kan förstås beräkna de partiella derivatorna utan kedjeregeln, genom att skriva g som en funktion av s och t från början. Dock *noll* poäng för att göra så. Däremot *får* du återvinna eventuella beräkningar från del (c).)

(e) Motivera varför ekvationen $f(x,\,y,\,z) = 5$ definierar z implicit som en funktion $z = h(x,\,y)$ i en omgivning av punkten $(1,\,2,\,0)$. Bestäm sedan h_x, h_y och h_{yy} i punkten $(1,\,2)$. (3p)

Var god vänd!

2. (a) Motivera varför funktionen (1p)

$$f(x,\,y) = xye^{-x^2-2y^2}$$

antar både ett största och ett minsta värde i $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestäm alla kritiska punkterna till f och sedan klassificera dem (4p)

i. genom att tillämpa andra derivatornas test (Hessianen eller kvadratiska former)

ii. *utan* att räkna på andraderivator, dvs du ska kunna motivera direkt varför varje kritisk punkt har en viss karaktär.

3. (a) Beräkna $\iint_T \frac{xy}{1+x^4}\,dA$, där T är triangeln med hörnen i $(0,\,0)$, $(1,\,0)$ och $(1,\,3)$. (1.5p)

(b) Beräkna (2.5p)

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dA,$$

där D är området i den första kvadranten som begränsas av $y=0$, $y=x$, $xy=1$ och $x^2-y^2=1$.

(c) Bestäm masscentrumet för en homogen kropp som ockuperar området innanför kuben $0 \le x,\,y,\,z \le 1$ och under planet $x+y+z=2$. (2.5p)

(d) Gör en skiss som visar den del av ytan $z = x^2+y^2$ som begränsas av ytan $10 - z^2 = 3(x^2+y^2)$. Bestäm sedan dess ytarea. (3p)

4. (a) Låt γ_1 vara kurvan med parametrisering (3p)

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t,\,\sin 2t), \quad 0 \le t \le \pi.$$

i. Gör en skiss av kurvan och indikera färdriktningen.

ii. Beräkna arean som innesluts av kurvan.

(b) Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara fältet (2.5p)

$$\mathbf{F}(x,\,y) = \left(\frac{1}{2}x\sin y^2 - y^3,\; x^2 y\cos y^2 + 3x\right).$$

Beräkna $\oint_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, där γ_2 är randen till trapezoiden med hörnen i $(0,\,-2)$, $(1,\,-1)$, $(1,\,1)$ och $(0,\,2)$, genomlöpt moturs.

5. Låt $\mathbf{F}(x,\,y,\,z) = (3xz^2,\,y,\,z^3)$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut ur området som begränsas av de tre ytorna $y^2+z^2=1$, $x=0$ och $x=1$

(a) med hjälp av Gauss sats (2.5p)

(b) utan Gauss sats, dvs via direkt beräkning av flödesintegraler. (2.5p)

6. Formulera tydligt och sedan bevisa Lagranges sats om maximering/minimering av en funktion $f(x,\,y)$ under ett bivillkor $g(x,\,y)=0$ där både $f,\,g \in C^1$. (5p)

7. Formulera och bevisa en rekursiv formel för volymen $\mu(B_n)$ av enhetsklotet i $\mathbb{R}^n$. (6p)

8. Vilken/a av följande ekvationer stämmer för *alla* C^2-fält $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$? I fallet ekvationen alltid stämmer ge ett bevis. Annars ge ett konkret motexempel. (4p)

(a) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \mathbf{0}$.

(b) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

Go n'eirí an bóthar libh!

Lösningar Flervariabelanalys F/TM, 180828

1. (a) Vi har

$$f_x = 2xe^{yz} + \frac{z^2 - y^2}{x^2} \overset{(1,2,0)}{=} -2,$$
$$f_y = x^2 z e^{yz} + \frac{2y}{x} \overset{(1,2,0)}{=} 4,$$
$$f_z = x^2 y e^{yz} - \frac{2z}{x} \overset{(1,2,0)}{=} 2.$$

Tangentplanens ekvation lyder

$$(f_x,\, f_y,\, f_z) \cdot (x - x_0,\, y - y_0,\, z - z_0) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (-2,\, 4,\, 2) \cdot (x - 1,\, y - 2,\, z) = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow -x + 2y + z = 3.$$

(b) Vi har

$$g_x = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + y}} \overset{(1,2)}{=} \frac{3}{2}, \tag{1}$$
$$g_y = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 + y}} \overset{(1,2)}{=} \frac{1}{4}. \tag{2}$$

En riktningsvektor för tangenten till skärningskurvan ges då av

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & -1 \end{vmatrix} \propto \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \cdots = (-9,\, 2,\, -13)\,.$$

(c) Vi har redan att $g(1,\, 2) = 0$, $g_x(1,\, 2) = 3/2$, $g_y(1,\, 2) = 1/4$. Och sedan,

$$g_{xx} = \frac{3x(x^3 + 2y)}{(2x^3 + y)^{3/2}} \overset{(1,2)}{=} \frac{15}{8}, \tag{3}$$
$$g_{xy} = -\frac{3x^2}{2(2x^3 + y)^{3/2}} \overset{(1,2)}{=} -\frac{3}{16}, \tag{4}$$
$$g_{yy} = -\frac{1}{4(2x^3 + y)^{3/2}} \overset{(1,2)}{=} -\frac{1}{32}. \tag{5}$$

Så Taylorpolynomet av grad 2 i punkten (1, 2) är

$$P(h,\, k) = 0 + \left(\frac{3h}{2} + \frac{k}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{15h^2}{8} - \frac{3hk}{8} - \frac{k^2}{32}\right) = \frac{1}{64}(96h + 16k + 60h^2 - 12hk - k^2).$$

(d) Notera att $x_s = 2s\cos(s^2 + t^2)$ och $y_s = -t\sin(st)$. Enligt kedjeregeln plus (1) och (2) har vi då

$$\frac{\partial g}{\partial s} = g_x x_s + g_y y_s = \left[\frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + y}}\right][2s\cos(s^2 + t^2)] - \frac{t\sin(st)}{2\sqrt{2x^3 + y}}.$$

Enligt kedjeregeln en gång till plus produktregeln plus likheten $g_{xy} = g_{yx}$ har vi sedan

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}(g_x x_s + g_y y_s)$$
$$= g_x x_{ss} + x_s \frac{\partial g_x}{\partial s} + g_y y_{ss} + y_s \frac{\partial g_y}{\partial s}$$
$$= g_x x_{ss} + x_s(g_{xx} x_s + g_{xy} y_s) + g_y y_{ss} + y_s(g_{xy} x_s + g_{yy} y_s)$$
$$= g_x x_{ss} + g_y y_{ss} + g_{xx} x_s^2 + g_{yy} y_s^2 + 2g_{xy} x_s y_s. \tag{6}$$

Men

$$x_{ss} = \frac{\partial}{\partial s}[2s\cos(s^2+t^2)] = 2\cos(s^2+t^2) - 4s^2\sin(s^2+t^2), \tag{7}$$

$$y_{ss} = \frac{\partial}{\partial s}[-t\sin(st)] = -t^2\cos(st). \tag{8}$$

Insättning av (3) (4), (5), (7) och (8) in i (6) ger till slut

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} = \left[\frac{3x^2}{\sqrt{2x^3+y}}\right][2\cos(s^2+t^2) - 4s^2\sin(s^2+t^2)] - \frac{t^2\cos(st)}{2\sqrt{2x^3+y}}$$

$$+\left[\frac{3x(x^3+2y)}{(2x^3+y)^{3/2}}\right][4s^2\cos^2(s^2+t^2)] - \frac{t^2\sin^2(st)}{4(2x^3+y)^{3/2}} + \left[\frac{3x^2}{(2x^3+y)^{3/2}}\right][2st\cos(s^2+t^2)\sin(st)].$$

(e) Vi har sett i del (a) att $f_z(1, 2, 0) = 2$. Eftersom $f_z \neq 0$ så medför Implicita Funktionsstasen att en implicit funktion $z = h(x, y)$ definieras i en omgivning av $(1, 2, 0)$ och att

$$\begin{aligned} h_x(1, 2) &= -\frac{f_x}{f_z} = 1, \\ h_y(1, 2) &= -\frac{f_y}{f_z} = -2. \end{aligned} \tag{9}$$

Sedan har vi

$$\begin{aligned} h_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}h_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{f_z}\right) &= \frac{f_y\frac{\partial f_z}{\partial y} - f_z\frac{\partial f_y}{\partial y}}{f_z^2} \\ &\overset{(1,2,0)}{=} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial f_y}{\partial y} \\ = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2ye^{yz} - \frac{2z}{x}\right) &- \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2ze^{yz} + \frac{2y}{x}\right) \\ = \left[x^2e^{yz}(1 + y(yh_y + z)) - \frac{2}{x}h_y\right] &- \frac{1}{2}\left[x^2e^{yz}(h_y + z(yh_y + z)) + \frac{2}{x}\right] \\ &\overset{(1,2,0)}{=} \cdots = -3, \end{aligned}$$

där vi har använt (9) vid sista insättningen.

2. (a) Funktionen är uppenbarligen kontinuerlig, går mot noll då avståndet från origo går mot oändligheten och antar både positiva och negativa värden. Därför måste både ett globalt max- och ett globalt min-värde antas.

(b) Med hjälp av produktregeln får vi

$$f_x = e^{-x^2-2y^2}y(1-2x^2), \quad f_y = e^{-x^2-2y^2}x(1-4y^2).$$

Eftersom exponentialen är aldrig noll så måste i en kritisk punkt antingen $x = y = 0$ eller $1-2x^2 = 1-4y^2 = 0$ gälla. Det första alternativet ger punkten $(0, 0)$. Det andra alternativet ger ytterligare fyra punkter: $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/2)$.

i. Om vi använder oss av andra derivatornas test, notera först att det räcker att kontrollera $(0, 0)$ samt punkterna $(1/\sqrt{2}, \pm 1/2)$, ty $f(-x, -y) = f(x, y)$ så av symmetriskäl har $\pm(1/\sqrt{2}, 1/2)$ samma karaktär och samma sak för $\pm(1/\sqrt{2}, -1/2)$. Vi har

$$\begin{aligned} A = f_{xx} &= 2xy(2x^2-3)e^{-(x^2+2y^2)}, \\ B = f_{xy} &= (1-2x^2)(1-4y^2)e^{-(x^2+2y^2)}, \\ C = f_{yy} &= 4xy(4y^2-3)e^{-(x^2+2y^2)}. \end{aligned}$$

I punkten $(0, 0)$ är $A = C = 0$, $B = 1$ så $AC - B^2 < 0$ vilket medför sadelpunkt.

I punkterna $(1/\sqrt{2},\ \pm 1/2)$ är $A = \mp\sqrt{2}/e$, $B = 0$, $C = \mp 2\sqrt{2}/e$. Så $AC - B^2 = 4/e^2 > 0$ i båda punkterna vilket medför lokala extrempunkter. Lokal max (resp. lokal min.) $\Leftrightarrow A < 0$ (resp. $A > 0$). Så $\pm(1/\sqrt{2},\ 1/2)$ är lokala maxima medan $\pm(1/\sqrt{2}, -1/2)$ är lokala minima.

ii. Man kan se direkt att $(0,\ 0)$ är en sadelpunkt ty $f(x,\ y) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq 0$, så f antar positiva värden i de 1:a och 3:e kvadranterna och negativa värden i de 2:a och 4:e kvadranterna. Därmed antar f både positiva och negativa värden godtyckligt nära $(0,\ 0)$.
När det gäller övriga punkter så har vi konstaterat i del (a) att både ett globalt max och ett globalt min måste antas någonstans. Därför måste de antas i kritiska punkter. Eftersom f antar samma positiva värde i $\pm(1/\sqrt{2},\ 1/2)$ och samma negativa värde i $\pm(1/\sqrt{2},\ -1/2)$ så följer det att de två första måste vara lokala maxima och de två sista vara lokala minima.

3. (a) Det är viktigt att integrera m.a.p. y först. Integralen blir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx \int_0^{3x} y\,dy &= \frac{9}{2}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx \\ &\overset{u:=1+x^4}{=} \frac{9}{8}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{9}{8}(\ln 2).\end{aligned}$$

(b) Notera att $xy = 0$ på koordinataxlarna och att $x^2 - y^2 = 0$ på linjerna $y = \pm x$. Sätt $D_2 = \{(x,\ y) : 0 < xy < 1,\ 0 < x^2 - y^2 < 1\}$. D_2 är alltså unionen av D och dess spegelbild i origo, så variabelbytet $u = xy$, $v = x^2 - y^2$ är ett-till-ett inom D och vi kan skriva $D = \{(u,\ v) : 0 < u < 1,\ 0 < v < 1\}$. Vi har

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = 2(x^2 + y^2)$$

och därmed

$$dx\,dy = \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\,du\,dv = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}\,du\,dv.$$

Alltså,

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dA = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 du\,dv = \frac{1}{2}.$$

(c) Kalla masscentrumet för $\overline{m} = (m_x,\ m_y,\ m_z)$. Av symmetriskäl så är $m_x = m_y = m_z$ så det räcker att beräkna m_x, säg. Kalla det ockuperade området för R. Eftersom kroppen är homogen så är

$$m_x = \frac{\iiint_R x\,dV}{\iiint_R dV}$$

När det gäller gränserna i integralerna, notera att i området R, för givna x och y mellan 0 och 1, så måste $0 \leq z \leq \min\{1,\ 2 - x - y\}$ gälla. Min är 1 då $x + y \leq 1$, dvs då $y \leq 1 - x$, medan att min är $2 - x - y$ då $1 - x \leq y \leq 1$.

Det är därför lämpligt att dela upp integralerna i två delar, enligt

$$\iiint_R x\,dV = \int_0^1 x dx\left(\int_0^{1-x} dy \int_0^1 dz + \int_{1-x}^1 dy \int_0^{2-x-y} dz\right) = \cdots = 3/8,$$

$$\iiint_R dV = \int_0^1 dx\left(\int_0^{1-x} dy \int_0^1 dz + \int_{1-x}^1 dy \int_0^{2-x-y} dz\right) = \cdots = 5/6,$$

sådan att $m_x = \frac{3/8}{5/6} = \frac{9}{20}$.

Svar: $\overline{m} = \left(\frac{9}{20},\ \frac{9}{20},\ \frac{9}{20}\right)$.

(d) Se Figur L.3(d) för skissen. Ytan $z = f(x,\, y) = x^2 + y^2$ är en funktionsyta så vi söker

$$\text{Area} = \iint dS = \iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dx\, dy = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dx\, dy,$$

där D är projektionen på xy-planet av den begränsade delen av ytan. Randen till D härleds genom att sätta

$$z^2 = (x^2 + y^2)^2 = 10 - 3(x^2 + y^2) \overset{u:=x^2+y^2}{\Rightarrow} u^2 + 3u - 10 = 0 = (u+5)(u-2),$$

så $u = 2$ ty $x^2 + y^2$ måste vara positiv. M.a.o. D är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 2$. Vi byter till polära koordinater och får

$$\text{Area} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr \overset{v:=1+4r^2}{=} \frac{\pi}{4} \int_1^9 \sqrt{v}\, dv = \cdots = \frac{13\pi}{3}.$$

4. (a) Se Figure L.4(a) för skissen. Eftersom kurvan genomlöps medurs så medför Greens sats att den inneslutna arean ges av

$$-\oint_{\gamma_1} x\, dy = -\int_0^{\pi} (\sin t)(2\cos 2t)\, dt = -2\int_0^{\pi} (\sin t)(2\cos^2 t - 1)\, dt$$
$$= -2\left[-\int_0^{\pi} \sin t\, dt + 2\int_0^{\pi} \cos^2 t \sin t\, dt\right].$$

Vi har

$$\int_0^{\pi} \sin t\, dt = [\cos t]_{\pi}^{0} = 2,$$
$$\int_0^{\pi} \cos^2 t \sin t\, dt \overset{u:=\cos t}{=} \int_{-1}^{1} u^2\, du = \frac{2}{3}.$$

Så arean blir $-2[-2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)] = \frac{4}{3}$.

(b) Vi använder oss av Greens sats igen. Vi har

$$\oint_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_D [(2xy\cos y^2 + 3) - (xy\cos y^2 - 3y^2)]\, dx\, dy,$$

där D är insidan av trapezoiden, vilket kan beskrivas som

$$D = \{(x,\, y) : 0 \leq x \leq 1,\ x - 2 \leq y \leq 2 - x\}.$$

Alltså,

$$\oint_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 dx \int_{x-2}^{2-x} (3 + 3y^2 + xy\cos y^2)\, dy.$$

Den till synes krångliga tredje termen integrerar till noll av symmetriskäl. Vi har kvar

$$\int_0^1 [6(2-x) + 2(2-x)^3]\, dx \overset{u:=2-x}{=} \int_1^2 (6u + 2u^3)\, du = \cdots = \frac{33}{2}.$$

5. (a) Enligt Gauss sats så är det utåtgående flödet lika med $\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$, där K är den inneslutna kroppen. Vi har

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 6z^2 + 1, \quad K = \{(x,\, y,\, z) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y^2 + z^2 \leq 1\},$$

så flödet blir

$$\int_0^1 dx \iint_{y^2+z^2\leq 1} (6z^2 + 1)\, dy\, dz = \pi + 6\iint_{y^2+z^2\leq 1} z^2\, dy\, dz$$
$$= \pi + 6\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^1 r^3\, dr = \cdots = \frac{5\pi}{2}.$$

(b) Området K begränsas av de tre ytorna $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ där

$$\mathcal{S}_1 = \{(0,\, y,\, z) : y^2 + z^2 \le 1\},$$
$$\mathcal{S}_2 = \{(1,\, y,\, z) : y^2 + z^2 \le 1\} = \{(1,\, r\cos\theta,\, r\sin\theta) : 0 \le r \le 1,\, 0 \le \theta \le 2\pi\},$$
$$\mathcal{S}_3 = \{(x,\, y,\, z) : 0 \le x \le 1,\, y^2 + z^2 = 1\} = \{(x,\, \cos\theta,\, \sin\theta) : 0 \le x \le 1,\, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

På $\mathcal{S}_1$ så ges den utåtgående enhetsnormalen av $\hat{\mathbf{N}} = (-1,\, 0,\, 0)$ så $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \equiv 0$ och $\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0$.

På $\mathcal{S}_2$ så ges den utåtgående enhetsnormalen av $\hat{\mathbf{N}} = (1,\, 0,\, 0)$ så $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = 3z^2$ och

$$\iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{y^2+z^2\le 1} 3z^2\, dy\, dz = \cdots = \frac{3\pi}{4},$$

där dubbelintegralen beräknas på samma sätt som i del (a).

På $\mathcal{S}_3$ så är

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = \hat{\mathbf{r}}\, dx\, d\theta = (0,\, \cos\theta,\, \sin\theta)\, dx\, d\theta = (0,\, y,\, z)\, dx\, d\theta$$

och

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = (y^2 + z^4)\, dx\, d\theta = (\cos^2\theta + \sin^4\theta)\, dx\, d\theta.$$

Alltså,

$$\iint_{\mathcal{S}_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + \sin^4\theta)\, d\theta = \cdots = \frac{7\pi}{4},$$

där vi har använt oss av följande trigonometriska uträkningar och symmetrier hos cos och sin:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta),$$
$$\sin^4\theta = \sin^2\theta(1 - \cos^2\theta) = \sin^2\theta - \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) - \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta).$$

Slutgiltig ihopsättning ger att det totala utflödet blir

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS + \iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS + \iint_{\mathcal{S}_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0 + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{5\pi}{2},$$

vilket överensstämmer med svaret från del (a).

6. Sats 4.3.1 i boken.

7. Exempel 7.2.7 i boken.

8. (a) Inte alltid sant. T.ex. om $\mathbf{F} = (xyz,\, 0,\, 0)$ så är $\nabla\times\mathbf{F} = (0,\, xy,\, -xz)$ och $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = (0,\, z,\, y)$.

(b) Alltid sant. Se Exempel 10.4.15 i boken. För full pott borde man dock utföra den fullständiga beräkningen och visa hur Sats 2.5.9 används. Alltså:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla \times \mathbf{F})_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla \times \mathbf{F})_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}(\nabla \times \mathbf{F})_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_3}\right) + \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \partial x_2}\right) = 0,
\end{aligned}$$

där vi i sista steget använder Sats 2.5.9 för att kancellera tre par av andraderivator.