Flervariabelsanalys, Grupp 1A

Ludvig Andersson, Xinran Gao, Anes Imsirovic,
Jakob Johansson, Carin Lundqvist, Hedy Pettersson

14 februari 2019

1 Föreläsning 1 (2018-01-21)

1.1 Första och andragradsytor i $\mathbf{R}^3$

Förstagradsyta:
Plan: $ax + by + cz = d$.
Andragradsyta:
Sfär: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.
Cylinder: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.
Kon: $z^2 = c(x^2 + y^2)$.
Parabloid: $z = c(x^2 + y^2)$.

1.2 Flervariabelanalys

Betydelsen av flervariabelanalys: Studien av (differentierbara) funktioner av ett godtyckligt antal variabler.

1.3 Vad menas med att en funktion är differentierbar? Tre svar för en variabel.

1.3.1 Svar 1

Att gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

existerar. Alltså att funktionen $f(x)$ är differentierbar i $x = a$.

1.3.2 Svar 2

Att funktionen $f(x)$ kan linjäriseras i $x = a$. Alltså att $f(x)$ kan i en omgivning till a skrivas som

$$f(a+h) = f(a) + A \cdot h + h \cdot \rho(h), \tag{2}$$

där A är en konstant och $\lim_{h \to 0} \rho(h) = 0$.

1.3.3 Svar 3

Rita en graf över funktionen. Deriverbarhet för en funktion $f(x)$ i $x = a$ betyder att grafen har en unik tangentlinje i $x = a$.

1.4 Partiell derivata

Vi generaliserar svar 1 i två variabler. Funktionen $f(x, y)$'s partiella derivata med avseende på variabeln x i punkten (a, b) annoteras och definieras enligt följande ekvation.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}. \tag{3}$$

På samma sätt definieras funktionens partiella derivata med avseende på y i samma punkt enligt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}. \tag{4}$$

2 Föreläsning 2 (2018-01-22)

2.1 Partiell derivata

2.1.1 Definitionen av partiell derivata i det allmänna fallet

Låt $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ där $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R^n}$ och $\tilde{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ är en inre punkt i $\mathbf{D}$. Då gäller att

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{\mathbf{a}}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\tilde{\mathbf{a}} + h\tilde{\mathbf{e_i}}) - f(\tilde{\mathbf{a}})}{h}, \tag{5}$$

där i=1,2,..., n och $\tilde{\mathbf{e_i}}$ är en basvektor. Vi säger att en funktion är partiellt deriverbar om detta gränsvärde existerar.

2.1.2 Beräkningen av partiella derivator

Alla variabler förutom den vars partiell derivata man beräknar, kan betraktas som konstanta. På detta sätt kan man reducera problemet till envariabelsproblem.

Som exempel, säg att vi vill beräkna den den partiella derivatan för funktionen $f(x, y) = 2xy$ i punkten (1,2). Då kan vi först titta på den partiell derivatan med avseende på x och betrakta y som en konstant. Då får vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2y, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= 2 \cdot 2 = 4. \end{aligned} \tag{6}$$

På samma sätt får vi den partiella derivatan med avseende på y,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= 2x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) &= 2 \cdot 1 = 2.\end{aligned} \tag{7}$$

2.2 Differentierbarhet

Nu ska vi göra övergången från partiell derivata till differentierbarhet. För att illustrera skillnaden mellan dessa två begrepp kan vi betrakta funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{8}$$

som är partiellt deriverbar i varje punkt utanför origo. Vi kan enkelt räkna ut funktionens partiella derivator i origo. Längs med koordinataxlarna blir den partiella derivatan 0 men om vi försöker gå mot origo i en annan riktning, till exempel, längs $y = tx, t \in \mathbf{R}$, får vi

$$f(x,tx) = \frac{x(tx)}{x^2 + (tx)^2} = \frac{tx^2}{(1+t^2)x^2} = \frac{t}{1+t^2}. \tag{9}$$

Vi ser att $f(x,tx) \not\to 0$ då $x \to 0$, om $t \neq 0$. Det vill säga f är kontinuerlig i origo.

Enligt detta exempel ser vi att partiell deriverbarhet inte är en helt lämplig motsvarighet till begreppet deriverbarhet för funktioner av en variabel. Vi kan istället definiera diffentierbarhet i termer av linjärisering.

Kravet för att en funktion av en variabel ska vara deriverbar i en punkt a är att

$$\rho(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - A \tag{10}$$

går mot 0 då h går mot 0, där $A = f'(a)$. En ekvivalent formulering är att

$$f(a+h) - f(a) = Ah + h\rho(h), \tag{11}$$

där $\rho(h)$ går mot 0 när h går mot 0.
Formulering 11 kan även användas för funktioner med två variabler,

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = A_1 h + A_2 k + \sqrt{h^2+k^2}\rho(h,k), \tag{12}$$

där $\rho(h,k)$ går mot 0 när (h,k) går mot (0,0).
En funktion f med denna egenskap kallar vi differentierbar. Att en funktion är differentierbar innebär att den är partiellt deriverbar i alla riktningar. Definitionen av differentierbarhet i det allmänna fallet kommer presenteras senare.

2.2.1 Satser om differentierbara funktioner

Nu när vi har förståelse för vad en funktions differentierbarhet innebär, är det värt att lägga följande två satser om differentierbara funktioner på minnet.

2.2.2 Sats 2.2.1

Låt $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ där $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R^n}$ och $\tilde{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ är en inre punkt i $\mathbf{D}$. Då gäller att om f är differentierbar i $\tilde{\mathbf{a}}$, så kommer även funktionen f vara kontinuerlig i $\tilde{\mathbf{a}}$. Med andra ord gäller per definition att

$$\lim_{\tilde{\mathbf{x}} \to \vec{a}} f(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\tilde{\mathbf{a}}).$$

2.2.3 Sats 2.2.2

Låt $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ där $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R^n}$ och $\tilde{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ är en inre punkt i $\mathbf{D}$. Då gäller att om f är differentierbar i $\tilde{\mathbf{a}}$, så kommer alla partiella derivator till f att existera i punkten $\tilde{\mathbf{a}}$. Detta blir mer konkret när vi betraktar definitionen av en differentierbar funktion i det allmänna fallet.

2.2.4 Definition 2.2.2

Låt $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ där $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R^n}$ och $\tilde{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ är en inre punkt i $\mathbf{D}$. f sägs vara differentierbar i punkten $\tilde{\mathbf{a}}$ om

$$f(\tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{h}}) = f(\tilde{\mathbf{a}}) + \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2} \cdot \rho(\tilde{\mathbf{h}}), \tag{13}$$

där $\lim_{h \to 0} \rho(\tilde{\mathbf{h}}) = 0$. I den linjära approximationen ovan gäller att A_i är den partiella derivatan $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ av funktionen f, enligt sats.

2.3 Tangentplan

Från envariabelsanalysen är det välkänt att lutningen för en funktionskurva kan beskrivas av en tangentlinje $f(x) = f(x_0) + f(x_0)'(x - x_0)$ som tangerar i punkten $(x_0, f(x_0)$. I flervariabelanalys beskrivs istället lutningen för en differentierbar funktionsyta $f(x, y)$ i en punkt $(x_0, y_0), f(x_0, y_0))$ av ett tangentplan med ekvationen

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{14}$$

som kallas för tangentplanets ekvation. Här gäller att $z_0 = f(x_0, y_0)$.

2.4 Gradient

Gradienten för en funktion f svarar mot en vektor innehållande f:s partiella derivator i punkten $(x_1, ..., x_n)$ som komponenter. Allmänt gäller per definition att gradienten för en differentierbar funktion $f(x_1, ..., x_n)$ av n variabler ges av vektorn

$$\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{\mathbf{a}}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\tilde{\mathbf{a}}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{\mathbf{a}})) \tag{15}$$

där $\tilde{\mathbf{a}}$ är en inre punkt i f:s definitionsmängd. För det tidigare nämnda tangentplanet av två variabler enligt ekvation (14), gäller att det existerar en normalvektor vinkelrät mot tangentplanet genom punkten $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Denna normalvektor fastställs som gradienten för en differentierbar funktion f.

3 Föreläsning 3 (2018-01-24)

3.1 Mer om differtierbarhet

Vi har tidigare sett vad som blir följderna av att en funktion är differentierbar, se sats 2.2.1 och 2.2.2. Nu ska vi vända på implikationen och skapa krav så att vi kan avgöra om en funktion är differentierbar utifrån några givna förutsättningar.

3.1.1 Definitioner

En delmängd, $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R^n}$, kallas domän om den är öppen och bågvis sammanhängande.

Låt $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R^n}$ vara en domän. $C^0(\mathbf{D})$ definieras som mängden av alla funktioner som är kontinuerliga i hela definitionsmängden $\mathbf{D}$. Klassen $C^1(\mathbf{D})$ definieras som mängden av alla funktioner som ingår i $C^0(\mathbf{D})$ och vars samtliga partiella derivator existerar och är kontinuerliga på hela $\mathbf{D}$.

3.1.2 Sats 2.2.3

Om $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R^n}$ är en domän och $f \in C^1(\mathbf{D})$ så är f differentierbar i $\mathbf{D}$.

3.2 Riktningsderivata

Låt $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R^n}$ vara en domän där $\mathbf{a} \in \mathbf{D}$ och $\hat{\mathbf{u}}$ vara en enhetsvektor i $\mathbf{R^n}$. Riktningsderivatan för en funktion $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ i $\mathbf{a}$, i riktningen av $\hat{\mathbf{u}}$, ges av

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}} = f_{\hat{u}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\hat{u}) - f(\mathbf{a})}{h} \tag{16}$$

3.2.1 Sats 2.4.6

Låt $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R^n}$ vara en domän, $\mathbf{a} \in \mathbf{D}$. Antag att $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ är differentierbar i $\mathbf{a}$. Då existerar alla riktningsderivator till f i $\mathbf{a}$ och är då

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}} = \hat{\mathbf{u}} \bullet \nabla f(\mathbf{a}), \qquad \forall \hat{\mathbf{u}}$$

3.2.2 Konsekvenser av sats 2.4.6

Konsekvenserna av sats 2.4.6 följer direkt ur definitionen för skalärprodukt, $\mathbf{v} \bullet \mathbf{W} = ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{W}|| \cdot \cos\theta$. Detta betyder att $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}} f(\mathbf{a})$ kan ses som $||\nabla f(\mathbf{a})|| \cdot \cos\theta$.
En följd ges av sats 2.4.7 som säger att den riktning i vilken en differentierbar funktion f växer snabbast i en punkt $\mathbf{a}$ är i riktningen av $\nabla f(\mathbf{a})$. Vidare avtar funktionen snabbast i motsatt riktning.
Ytterligare en följd är att en differentierbar funktion f håller ett konstant värde om man rör sig i riktningen ortogonalt mot ∇f.

3.2.3 Nivåhyperytor

Låt $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ där $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R^n}$ är en domän och låt $c \in \mathbf{R}$. Ekvationen $f(x_1, x_2, ..., x_n) = c$ definierar en $(n-1)$-dimensionell så kallad nivå(hyper)yta till f. Denna ekvation hjälper oss att lösa uppgifter där tangentplan till funktioner ska bestämmas, där funktionens gradient är en normal till nivåytans tangentplan.

4 Föreläsning 4 (2018-01-24)

4.1 Kedjeregeln

I grunden är kedjeregeln för flera variabler mycket likt den för en variabel och används främst för att lösa partiella differentialekvationer. Vi kommer först introducera kedjeregeln för det allmänna fallet.

4.1.1 Sats 2.3.4

Låt $f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$ bero av $g_1 : \mathbf{R^m} \to \mathbf{R}, ..., g_n : \mathbf{R^m} \to \mathbf{R}$ och låt alla dessa funktioner vara differentierbara. Då gäller att sammansättningen
$f(g_1(t_1, t_2, ..., t_m), g_2(t_1, ..., t_m), ..., g_n(t_1, ..., t_m))$ är differentierbar och att den partiella derivatan med avseende på t_i blir

$$\frac{\partial}{\partial t_i} f(g_1(t_1, ..., t_m)), ..., g_n(t_1, ..., t_m)) = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_q}(g_1(t_1, ..., t_m)), ..., g_n(t_1, ..., t_m)) \frac{\partial x_q}{\partial t_i}. \tag{17}$$

4.1.2 Användning av kedjeregeln

På denna formen blir den partialla derivatan lite abstrakt så vi ger ett konkret exempel, där vi sätter $m = 2$ och $n = 2$. Vi låter $f(u(x, y), v(x, y))$ och då blir den partiella derivatan med avseende på x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{18}$$

Den partiella derivatan för y ser ut på liknande sätt. På ett enkelt sätt kan man säga att kedjeregeln i flera variabler fungerar så att man deriverar ett "g"i taget och tar dess inre partiella derivata, precis som i en variabel, och sedan adderar resultatet från varje g.

4.2 Partiell derivata av ordning högre än 1

Givet en funktion f av n st variabler

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

existerar det n st olika partiella derivator av första ordningen.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} = f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_n}$$

Den partiella derivatan $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ går även att betecknas med f_{x_1}. Det existerar $n \cdot n = n^2$ st olika andraderivator, då varje förstaderivata också kan deriveras med avseende på n st variabler. Vilket kan betecknas exempelvis $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ vilket också kan skrivas som f_{xy}. Det finns, man kanske kan börja ana, $n \cdot n \cdot n = n^3$ olika tredjederivator. Alltså finns n^k olika derivator av k:e ordningen. Frågan som uppkommer i detta sammanhang är om ordningen på de partiella derivatorna spelar någon roll. Svaret är att det inte spelar någon roll under vissa villkor.

Clairauts sats säger: Om $f \in C^k(\mathbf{D})$ och $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^n$ och $\mathbf{D}$ är en domän, spelar det ingen roll i vilken ordning man tar de partiella derivatorna, där $C^k(\mathbf{D})$ definieras som mängden av de $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ där f's alla partiella derivator av ordning upp till k existerar i hela $\mathbf{D}$ och är kontinuerliga funktioner.