Flervariabel sammanfattning LV1

Andre Koj cid: andrege mail: andrege@student.chalmers.se
Eli Najm cid: neli mail: neli@stundent.chalmers.se
Emelie Svensson cid: emesv mail: emesv@student.chalmers.se
Oskar Kolte cid: kolte mail: kolte@student.chalmers.se
Ismail Gülec cid: gulec mail: gulec@student.chalmers.se
William Hillard cid: hillard mail: hillard@student.chalmers.se

22 februari 2019

Innehåll

1 Introduktion

I detta dokument sammanfattas materialet under alla föreläsningar under läsvecka 1 (21/01/19 - 25/01/19). Detta material täcker sidorna 45-94 i kursboken.

2 Differentierbarhet

2.1 En variabel

I avseende på endast en variabel är definitionen för differentierbarhet ekvivalent med definitionen för deriverbarhet, vilken beskrivs i avsnitt 2.2.

2.2 Flera variabler

För två variabler gäller följande definition,

Definition(2.2.2): Låt $f : D \to \mathbb{R}$ där $D \in \mathbb{R}^2$ och låt (a, b) vara inre punkt i D. f sägs vara differentierbar i punkten (a, b) om,

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + A_1 h + A_2 k + \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h, k)$$

där A_1 och A_2 är konstanter och $\rho(h, k) \to 0$ då $(h, k) \to (0, 0)$.

För ett godtyckligt antal variabler gäller följande två definitioner,

Definition: Låt $f : D \to \mathbb{R}$ där $D \in \mathbb{R}^n$ och $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n)$ är en inre punkt i D. f sägs vara differentierbar i punkten $\boldsymbol{a}$ om,

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot h_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2} \cdot \rho(\boldsymbol{h})$$

där $A_1, ..., A_n$ är konstanter, $\boldsymbol{h} = (h_1, ..., h_n)$ och $\rho(\boldsymbol{h}) \to 0$ då $\boldsymbol{h} \to \vec{0}$. Om f är differentierbar i varje punkt $\boldsymbol{a} \in D$ säger vi att f är differentierbar.

Definition: Låt $f : D \to \mathbb{R}$ där $D \in \mathbb{R}^n$ och $\boldsymbol{a} \in D$. f sägs vara kontinuerlig i $\boldsymbol{x} = a$ om $f(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{a})$ då $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$.

Den sistnämnda definitionen beskriver hur kontinuitet följer av differentierbarhet. Som följd finns där två satser vilka beskriver fallet i två dimensioner. Här kopplar vi differentierbarhet till kontinuitet och existensen av partiella derivator.

Sats (2.2.1): Låt $f : D \to \mathbb{R}$ där $D \in \mathbb{R}^2$ och låt $(a, b) \in D$. Om f är differentierbar i (a, b) så är f kontinuerlig i (a, b).

Sats (2.2.2): Låt $f : D \to \mathbb{R}$ där $D \in \mathbb{R}^2$ och låt $(a, b \in D$. Om f är differentierbar i (a, b), då existerar alla dess partiella derivator i (a, b).

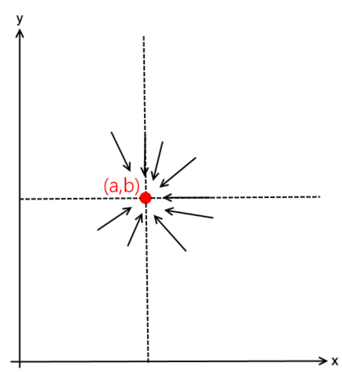
3 Partiell Derivata

3.1 Grundidé

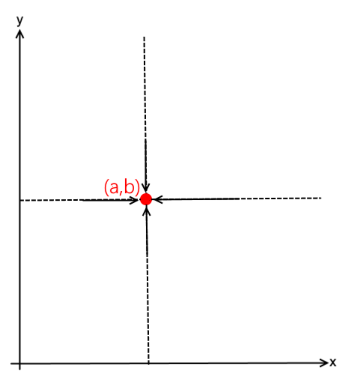
Låt säga att vi vill derivera en reellvärd funktion av en variabel i punkten $x{=}a$. Derivatan, $f'(a)$, blir då lika med gränsvärdet av differenskvoten när man närmar sig punkten a på x-axeln.

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

Då man försöker göra detta på en funktion av flera variabler stöter man på ett problem, det finns oändligt många sätt att närma sig en given punkt i en mängd $\mathbb{R}^k, k \geq 2$. För enkelhetens skull kan man visualisera fallet då $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.



Det man då har gjort är att definiera partiella derivator, då den partiella derivatan med avseende på en variabel innebär att man närmar sig punkten parallellt med den givna variabelns axel (resterande variabler hålls konstanta).



Den partiella derivatan med avseende på x respektive y i en godtycklig punkt *(a,b)* i $\mathbb{R}^2$ är definierade på följande sätt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} \tag{3}$$

Exempel på partiella derivator i $\mathbb{R}^2$:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x,y) = e^{x^2 y} + \sin{(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \cdot e^{x^2 y} + 2x \cdot \cos{(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 \cdot e^{x^2 y} + 2y \cdot \cos{(x^2 + y^2)}$$

För funktioner av flera variabler blir definitionen istället:

$$\begin{gathered} \text{Låt } f : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ där } D \subseteq \mathbb{R}^n \text{ och } \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h_i) - f(\boldsymbol{a})}{h_i}, \quad i = 1, 2, 3, ..., n. \end{gathered} \tag{4}$$

4 Gradient och riktningsderivata

4.1 Gradient

Definition(2.4.4): För differentierbara funktioner $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n)$ defineras **gradienten** av f i punkten $\boldsymbol{x}$ som vektorn

$$\text{grad} f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})) \right), \tag{5}$$

också kallad gradientvektorn. Anledningen till varför det görs är att det visar sig att även fast de partiella derivatorna bara visar hur en funktion växer i en viss punkt längs kordinataxlarnas led så kan man få ut information om hur funktionen växer i andra riktningar om man använder de partiella derivatorna tillsammans. Gradienten betecknas ofta även ∇f istället för grad f där ∇ utläses nabla. Med hjälp av gradientvektorn kan man bland annat förkorta Definition 2.2.2 till

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a}) \bullet \boldsymbol{h} + \|\boldsymbol{h}\| \cdot \rho(\boldsymbol{h}). \tag{6}$$

4.2 Riktningsderivata

För att undersöka tillväxten i en differentierbar funktion $f(\boldsymbol{x})$ i en given punkt $\boldsymbol{a}$ längs en given rät linje $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}$, där $\boldsymbol{v}$ är en enhetsvektor, kan man använda riktningderivatan. Den definieras som

(Def. 2.4.5)

$$f'_v(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}. \tag{7}$$

Denna definitionen använd dock inte speciellt ofta för att beräkna riktningsderivatan utan istället används

(Sats 2.4.6)

$$f'_v(\boldsymbol{a}) = \mathrm{grad} f(\boldsymbol{a}) \bullet \boldsymbol{v}. \tag{8}$$

Med hjälp av definitionen för skalärprodukt så får man

$$f'_v(\boldsymbol{a}) = |\mathrm{grad} f(\boldsymbol{a})| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \cos\gamma \tag{9}$$

där γ är vinkeln mellan $\nabla f(\boldsymbol{a})$ och riktningsvektorn. Eftersom $|\boldsymbol{v}| = 1$ och $-1 \leq \cos\gamma \leq 1$ ser man tydligt att riktningsderivatan är som störst när den är parallell med $\nabla f(\boldsymbol{a})$. Detta medför alltså att $\nabla f(\boldsymbol{a})$ pekar i den riktning som f växer snabbast i punkten $\boldsymbol{a}$.

4.3 Geometriska betydelse för gradient och tangetplan

För att förstå gradientens geometriska betydelse kan man ta ett exempel för en C^1-funktion $f(x,y)$ av två variabler. Titta på punkten (a,b) på nivåkurvan

$$f(x,y) = C \tag{10}$$

till f. Eftersom (a,b) ligger på nivå kurvan är alltså $f(a,b) = C$. Låt

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

vara en bit av denna nivåkurva med

$$f(x(t_0), y(t_0)) = (a,b).$$

Då blir derivatan av

$$f(x(t), y(t)) = C$$

med avseende på t lika med 0. Använder man kedjeregeln samt att $t = t_0$ får man dessutom

$$\text{grad} f(a,b) \bullet (x'(t_0), y'(t_o)) = 0. \tag{11}$$

Här är $(x'(t_0), y'(t_o))$ tangentrikningen i punkten (a,b) och därför måste grad$f(a,b)$ vara vinkelrät mot tangenten för att likheten ska gälla. Det ger sats 2.5.8. För tre variabler gäller samma sak men då är ∇f normalvektorn till nivåytan i punkten (a,b,c).

Sats 2.5.8 kan då användas för att bestämma tangenter för nivåkurvor och nivåytor. Eftersom normalen till kurvan $f(x,y) = C$ i en punkt (a,b) är $\left(f'_x(a,b), f'_y(a,b)\right)$ blir tangentekvationen

$$f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) = 0.$$

På samma sätt blir tangentplanets ekvation till $f(x,y,z) = C$ i punkten (a,b,c)

$$f'_x(a,b,c)(x-a) + f'_y(a,b,c)(y-b) + f'_z(a,b,c)(y-c) = 0.$$

5 Kedjeregeln

Ett viktigt verktyg vid derivering av en variabel är kedjeregeln, som används när sammansatta funktioner deriveras. Dess form i en variabel ser ut på följande vis:

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t) \tag{12}$$

Alltså används kedjeregeln i en variabel då man har sammansättningar av typen:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{13}$$

Kedjeregeln kan dessutom tillämpas på sammansättningar av funktioner av flera variabler, alltså som ser ut på formen:

$$f(\mathbf{g}(t)) = f(g_1(t), ..., g_n(t)) \tag{14}$$

Om funktionen ovan (14) är differentierbar och funktionerna $g_1(t), ..., g_n(t)$ är deriverbara inom ett intervall $a < t < b$ på $\mathbf{R}$. Då är också den sammansatta funktionen $f(\mathbf{g}(t)$ också deriverbar i a<t<b och kedjeregeln uttryck på följande sätt:

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{g}(t)) = f'_{x_1}(\mathbf{g}(t)) \cdot g'_1(t) + ... + f'_{x_n}(\mathbf{g}(t)) \cdot g'_n(t). \tag{15}$$

Kedjeregeln möjliggör också för beräkning av funktioners derivator då även de inre funktionerna beror av flera variabler dvs. något som ser ut på formen:

$$u(\mathbf{x}(\mathbf{t})) = u(x_1(t_1, ..., t_q), ..., x_n(t_1, ..., t_q))$$

Vid derivering av denna funktion med avseende på någon variabel t_j hålls de andra t_k konstanta. Om de inre funktionerna är av klassen C^1 så är $u(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$ partiellt deriverbar med avseende på alla variabler $t_j, j = 1, ..., q$ och kedjeregeln kan uttryckas på följande sätt:

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j} \tag{16}$$

6 Högre Ordningens Derivator

I en variabel kan en funktion som är deriverbar deriveras flera gånger, om den är flera gånger deriverbar. För funktioner av flera variabler gäller samma sak. Om de partiella derivatorna till en funktion $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n)$ i sin tur är partiellt deriverbara så kan man bilda:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \tag{17}$$

för $j, k = 1, ..., n$

De andra ordningens partiella derivator kan betecknas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}, f''_{x_k x_j}, f''_{kj} \tag{18}$$

Definition
Låt f vara definierad i en öppen mängd $D \subseteq R^n$. Vi säger då att f är av klass C^k, eller att f tillhör $C^k(D)$, om alla partiella derivator till och med ordning k existerar och är kontinuerliga i D.

En viktig sats som förenklar deriveringen är sats 9 (sidan 87 P.B) och lyder: För vare funktion $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n)$ av klass C^2 gäller att:

$$f_{jk} = f_{kj} \tag{19}$$