CHALMERS
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Flervariabelanalys läsvecka 1

Sammanfattning av veckans innehåll

Carl Thorell, Abdulvakhab Borchashvili, Joakim Blomqvist,
Edward Hadziavdic, Amiri Mohammad, Eli Ismailov

Examinator: Peter Hegarty

Tavelpresentation i kursen Flervariabelanalys, TKTFY-1

LP 3 2019

Innehåll

1 Första- och andragradsytor

1.1 Förstagradsytor

Den enda förstagradsytan som finns är ett vanligt plan, vars ekvation är på formen $ax + by + cz = d$, där x, y, z är variabler och a, b, c är reella tal. Om planet inte är parallellt med z-axeln kan planet uttryckas i den s.k. standardformen $z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$, där A, B är reella konstanter och (x_0, y_0, z_0) är en godtycklig punkt i planet.

1.2 Andragradsytor

Vad andragradsytor beträffar täcktes sfären, ellipsoiden, cylindern, konen, paraboloiden och den hyperboliska paraboloiden. Dessa kännetecknas av att ekvationerna som beskriver dem innehåller andragradstermer. Exempelvis beskrivs en paraboloid som är symmetrisk kring z-axeln, har cirkulärt tvärsnitt samt spets i $(0, 0, 0)$ av $z = c(x^2 + y^2)$, där c är en godtycklig positiv konstant. För ett elliptiskt tvärsnitt är standardformen $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, där $a, b \neq 0$.

2 Partiella derivator och differentierbarhet

2.1 Deriverbarhet i en variabel

I en variabel har vi tre olika sätt att definiera deriverbarhet. Den första och kanske den vanligaste definitionen av deriverbarhet hos en funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i en punkt $x = a$ är att följande gränsvärde existerar.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

Om detta gränsvärde existerar så säger vi att f är deriverbar i punkten a. Den andra, lite mer generaliserade definitionen härleds från föregående definition och lyder så här:

$$f(a + h) = f(a) + Ah + h\rho(h) \tag{2}$$

där $\rho(h) \longrightarrow 0$ då $h \longrightarrow 0$ och förutsatt att $\exists A \in \mathbb{R}$. Det man gör helt enkelt är att man approximerar f med en linjär funktion i närheten av $x = a$.

Den tredje definitionen av deriverbarhet är i stort sett samma som den förra men geometriskt. Den säger att om man betraktar en funktionsgraf så har grafen en unik tangentlinje i punkten $x = a$. Det finns en motsvarighet till detta i två variabler men vi har inte längre en unik tangentlinje utan ett tangentplan. Vi ska kolla närmare på detta lite senare.

2.2 Partiella derivator

Innan har vi enbart betraktat derivator av funktioner som består av en variabel. Då man kommer en dimension upp och ska undersöka funktioner $f(x, y)$ som beror på två variabler behöver man derivera partiellt. Tricket är att man ser funktionen av två variabler, som **två** funktioner av **en** variabel.

Om man vill undersöka hur en funktion $f(x, y)$ av två variabler beter sig är det vanligaste att betrakta dess partiella derivator först. Man närmar sig först punkten (a, b) från en riktning parallell med x-axeln. Betrakta gränsvärdet:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \tag{3}$$

Om detta gränsvärde existerar säger man att f är partiellt deriverbar i punkten (a, b) med avseende på x. På samma sätt definierar man den partiella derivatan med avseende på y som följande gränsvärde, om gränsvärdet existerar då.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} \tag{4}$$

Nedan ser vi definitionen för partiella derivator av en funktion av godtyckligt antal variabler.

Definition (2.1.1) Låt **a** vara en inre punkt i definitionsmängden A till funktionen av n variabler. Om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f(\mathbf{x})+h\mathbf{e}_{\mathrm{j}})-f(\mathbf{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,...,x_{j-1},x_j+h,x_{j+1},...,x_n)-f(x_1,...,x_n)}{h} \tag{5}$$

existerar så sägs det att f är partiellt deriverbar med avseende på variablen x_j i punkten **a**.

2.3 Differentierbarhet i två variabler

Vi har tidigare nämnt den generaliserade definitionen (2) av deriverbarhet i envariabel. I två variabler motsvaras denna av:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=A_1h+A_2k+\sqrt{h^2+k^2}\rho(h,k) \tag{6}$$

där $\rho(h,k)\longrightarrow 0$ då $(h,k)\longrightarrow 0$ och förutsatt att det $\exists A_1,A_2\in\mathbb{R}$. Koefficienten framför feltermen kommer från att vi har vandrat från punkten (a,b) till punkten $(a+h,b+k)$, först parallellt med x-axeln och sedan parallellt med y-axeln. Enligt Pythagoras sats blir avståndet $\sqrt{h^2+k^2}$. Per definition är A_1 och A_2 konstanter men vi får en tydligare bild efter nästa sats.

Sats (2.2.2). *En differentierbar funktion f av två variabler är partiellt deriverbar med*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=A_1 \text{ och } \frac{\partial f}{\partial x_2}=A_2 \tag{7}$$

där talen A_1,A_2 är talen i (6).

Satsen säger oss att koefficienterna A_1 och A_2 framför h respektive k i (6) är $f's$ partiella derivator i punkten (a,b) med avseende på x, respektive y.

Sats (2.2.1). *En differentierbar funktion är kontinuerlig*

Beviset för denna sats är en iakttagelse av (6). Där ser vi att (VL) $\longrightarrow$ 0 då (h,k)$\longrightarrow$ 0, vilket precis innebär att f är kontinuerlig i punkten (a,b).

För att visa att funktioner är differentierbara utan att behöva använda definitionen finns en sats som gäller för funktioner som uppfyller vissa krav, för att beskriva dessa krav införs några definitioner.

Definition: En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$ som är öppen och bågvis sammanhängande kallas för en domän.

Om en mängd M ska vara bågvis sammanhängande innebär det att man kan dra en kontinuerlig båge mellan två godtyckliga punkter i M utan att bågen lämnar mängden.

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän, då gäller följande:

$$\begin{aligned} C^0(D) &= \{\ f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ är kontinuerlig i } D\} \\ C^1(D) &= \{\ f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ är kontinuerlig och} \\ &\qquad \text{partiellt deriverbar i } D \text{ där alla} \\ &\qquad \text{partialderivator är kontinuerliga i } D\} \end{aligned} \tag{8}$$

Dessa definitioner kan användas för att formulera följande sats:

Sats (2.2.3): Om $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är en domän och $f \in C^1(D) \Rightarrow f$ är differentierbar.

Beviset går sammanfattat ut på att tolka olika delar av uttrycket som ett envariabel-uttryck. Detta gör det möjligt att använda medelvärdesatsen för att sedan härleda definitionen för differentierbarhet.

2.4 Differentierbarhet i godtyckligt antal variabler

Vi vet nu vad det innebär att en funktion av högst två variabler är differentierbar. Frågan är då om man kan generalisera begreppet differentierbarhet i godtyckligt antal variabler. Svaret på den frågan är, ja. Definitionen är snarlik definitionen av differentierbarhet för två variabler men dock med lite mer notation. Här definierar vi differentierbarhet för godtyckligt antal variabler:

$$f(a_1 + h_1, ..., a_n + h_n) = f(a_1, ..., a_n) + \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2} \cdot \rho(h_1, ..., h_n) \tag{9}$$

där $\rho(h_1, ..., h_n) \to 0$ då $(h_1, ..., h_n) \to 0$ och förutsatt att det $\exists A_1, ..., An \in \mathbb{R}$

2.5 Tangentplan

Analogt med scenariot i en variabel, där det m.h.a. derivatan går att hitta en linje som tangerar funktionen i en punkt $(x, y) = (a, b)$ (som tillhör definitionsmängden), är det möjligt att utifrån definitionen av differentierbarhet genom linjärisering i två variabler hitta ett plan som tangerar funktionsytan i en punkt $(x, y, z) = (a, b, f(a, b))$ (som tillhör definitionsmängden). Betrakta denna definition, som lyder

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot k + \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h, k) \quad (10)$$

där $\rho(h, k) \longrightarrow 0$ när $(h, k) \longrightarrow (0, 0)$. Från (10) kan ekvationen för ett plan plus en felterm urskiljas. När h, k är små ser vi att funktionsgrafen beter sig som det just nämnda planet. Efter införandet av $x_0 = a$, $y_0 = b$ och $z_0 = f(a, b) = f(x_0, y_0)$ ger (10) efter omflyttning och borttagning av felterm

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad (11)$$

där (x_0, y_0, z_0) är en godtycklig punkt på f's graf. Detta är identiskt med standardformen av ekvationen för ett plan, vilket medför att om vi låter x, y, z härja fritt beskriver (11) ett plan som tangerar funktionsgrafen i (x_0, y_0, z_0). På grund av detta benämns planet *tangentplan*.

3 Gradient och riktningsderivata

3.1 Gradient

Givet en funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definieras gradientoperatorns verkan på funktionen f som följande:

$$\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad ..... \quad , \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \mathrm{grad}(f)$$

Funktionen definieras som differentierbar i en punkt $\mathbf{r_0} \in \mathbb{R}^n$ om:

$$f(\mathbf{r_0} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{r_0}) + \mathbf{h} \cdot \nabla f(\mathbf{r_0}) + |\mathbf{h}|\, \rho(\mathbf{h}) \quad \text{där} \quad \rho(\mathbf{h}) \longrightarrow 0, \text{ då} \quad \mathbf{h} \longrightarrow \mathbf{0}.$$

3.2 Geometrisk intuition för gradienten

Gradienten är en vektor, som för samtliga värden inom funktionens definitionsmängd pekar i riktningen mot snabbast ökande funktionsvärde. Vilket påvisas senare under sektion 3.2.
Ett konkret exempel är att ansätta en funktion i två variabler $z = f(x, y)$ som beskriver höjden på ett berg. För att minimera tiden som krävs för att bestiga berget tar vi endast och beräknar $\nabla f(\mathbf{r_0})$, där $\mathbf{r_0}$ är initialkoordinaterna vid foten av berget. Därefter återstår endast att följa riktningen av den resulterade vektorn, med denna metodiken kommer bergsklättrarna att minimera tiden det krävs för att bestiga berget. (Under ideala förhållanden som exempelvis ingen gravitationskraft).

3.3 Riktningsderivata

Givet definitionen av nablaoperatorn ovan är riktningsderivatan definierad:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r_0}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{r_0} + h\hat{\mathbf{v}}) - f(\mathbf{r_0})}{h} \quad , \hat{\mathbf{v}} := \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Riktningsderivatan är en generalisering av partiella derivatan. Som bekant undersöker endast partiella derivatan funktionsvärdets ändring för en infinitesimal förändring till ingångsvärdet i en av variablerna medan de andra hålls konstanta. Riktningsderivatan däremot kan användas för att undersöka funktionsvärdets förändring längs med en vektor som sträcker sig från evalueringspunkten till en annan godtyckligt punkt.

Följande formel för riktningsderivatan visar:
Antag att f är differentierbar, samt tag en godtycklig riktningsvektor $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{v}} = |\nabla \mathbf{f}||\hat{\mathbf{v}}| \cos(\theta) = |\nabla \mathbf{f}| \cos(\theta), \text{ då} \quad |\hat{\mathbf{v}}| = 1$$

där θ betecknar vinkeln mellan riktningsvektorn och gradientvektorn. Detta betyder att riktningsderivatan maximeras för $\cos(\theta) = 1$, alltså måste vinkeln θ mellan vektorerna vara noll. Även här kan det noteras att riktningsderivatan antar sitt minsta värde då gradientvektorn och riktningsvektorn pekar i motsatt riktning ($\theta = \pi$).

Avslutningsvis, en något elementär sats som följer från deriveringsregeln för konstanta funktioner:
Sats (2.4.5): Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän och låt $f \in C^1$ definerad i D. Om

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{r} \in D \tag{12}$$

så är f konstant i D.

För att få en intuitiv förståelse kan vi använda oss av riktningsderivator. Ifall gradienten är nollvektorn i en punkt innebär det att även alla riktningsderivator är noll i den punkten. Om detta stämmer för alla punkter i D måste alla punkter vara på samma 'nivå', vilket betyder att f är konstant.

4 Kedjeregeln

4.1 Kedjeregeln i en variabel

Kedjeregeln är en regel för derivering av sammansatta funktioner, dvs om f och g är funktioner, då anger kedjeregeln derivatan av deras sammansättning $f \circ g$ (funktionen som avbildar x på $f(g(x))$ i termer av derivator av f och g och produkten av funktioner enligt

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t) \tag{13}$$

4.2 Kedjeregeln i flera variabler

Steg 1: Formeln ovan kan också användas vid beräkningar av partiella derivator. Om man nämligen har en funktion $f(x)$ av en variabel x kan vi på denna variabels plats sätta in en funktion $x = g(\mathbf{t}) = g(t_1, \ldots, t_q)$ av flera variabler $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_q)$ alltså

$$(f \circ g)(\mathbf{t}) = f(g(\mathbf{t})) = f(g(t_1, \ldots, t_q)) \tag{14}$$

Kedjeregeln säger om både f och g är differentierbar så är också $(f \circ g)$. Den partiella derivatan hos denna funktion ser ut på följande sätt

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(g(\mathbf{t})) = f'(g(\mathbf{t})) \; \cdot \; g'_{t_j}(\mathbf{t}) \quad \text{där} \quad j = 1, \ldots, q \tag{15}$$

Steg 2: Vi har en funktion f av n variabler $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ på vars respektive platser man sätter in funktionerna $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ av den enda variabeln t.

$$\mathbf{g}(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t)). \tag{16}$$

Sammansättningen blir en funktion av en variabel t och det är derivatan som intresserar oss. För att kunna derivera denna funktion behöver vi använda oss av sats 4(sida 65 i PB).

Sats 4: Låt $f(\mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n)$ vara en differentierbar funktion av n variabler, och antag att funktionerna $g_1(t) \ldots g_n(t)$ är deriverbara i intervallet $a < t < b$ på $\mathbb{R}$. Då är den sammansatta funktionen $f(\mathbf{g}(t))$ också deriverbar i $a < t < b$, och

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{g}(t)) = f'_{x_1}(\mathbf{g}(t)) \; \cdot \; g'_1(t) + \cdots + f'_{x_n}(\mathbf{g}(t)) \; \cdot \; g'_n(t) \tag{17}$$

Steg 3: Satsen ovan ger också möjligheten att beräkna de partiella derivatorna av en sammansatt funktion där även de inre funktionerna beror av flera variabler, alltså:

$$u(\mathbf{x}(\mathbf{t})) = u(x_1(t_1, \ldots, t_q), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_q)) \tag{18}$$

Där är $\mathbf{t} = (t_1 \ldots t_q)$ ett element i $\mathbb{R}^q$ och $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ tillhör $\mathbb{R}^n$. Funktionen u beror av n stycken $x_1, \ldots, x_n$ och var och en av dessa beror av de q variablerna $t_1, \ldots, t_q$. För att kunna derivera en sådan funktion med avseende på någon av variablerna t_j skall vi ju betrakta all övriga t_k som fixa. Då blir situationen precis som beskrivs i sats 4 (15) där den inre funktionen beror av en enda variabel. Om vi förutsätter att de ingående funktionerna $u = u(\mathbf{x})$ och $x_1(\mathbf{t}), \ldots, x_n(\mathbf{t})$ alla är av klassen C^1 så följer därför av anmärkningen efter denna sats att $u(\mathbf{x}(t))$ är partiell deriverbar med avseende på var och en av variablerna $t_j = 1, \ldots, q$ och att :

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j} \tag{19}$$

5 Partiella derivator av högre ordning

Ifall de partiella derivatorna av en funktion av ett godtycklig antal variabler $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ existerar, och i sin tur är partiellt deriverbara, går det att uttrycka partiella derivator av högre ordning enligt

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

för $j, k = 1, 2, ..., n$. En partialderivatas existens defineras enligt sats 2.2.1 som ovan.

Alternativa beteckningar för partialderivator av högre ordning är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}, \quad f''_{x_j x_k}, \quad f''_{jk}, \quad \text{etc.}$$

Observera särskilt då $j = k$ skrivs

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

Med hjälp av detta är det möjligt att definera en generell klass C^K

Definition (2.5.6) Låt f vara definerad i en öppen mängd $D \subseteq \mathbf{R}^n$ och låt $k \in \mathbf{N} \cup 0$. Det säges att f är av **klass** C^K, eller att f tillhör $C^k(D)$, om alla partiella derivator till och med ordning K existerar och är kontinuerliga i D.

En essentiell egenskap hos partiella derivator av högre ordning är att omkastning av derivationsordningen för blandade derivator i de flesta praktiskt förekommande fallen är obetydlig.

Sats (2.5.9) För varje funktion $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n)$ av klass C^2 gäller att

$$f''_{jk} = f''_{kj}$$

Detta innebär att det inte spelar någon roll i vilken ordning derivationsreglerna utförs, resultatet blir detsamma. Exempelvis är

$$f_{12} = f_{21} \text{ om } f \in C^2,$$
$$f_{112} = f_{121} = f_{211} \text{ om } f \in C^3.$$