Sammanfattning av föreläsningar läsvecka 1
Flervariabelanalys

Erik Bivrin
Erik Brusewitz
Elsa Danielsson
Arash Darakhsh
Nils Hammaräng Grip
Jack Sandberg

5 februari 2019

Flervariabelanalys är studien av differentierbara funktioner av ett godtyckligt antal variabler. Funktioner med flera variabler introduceras med ytor i rummet, vilka enkelt ger en uppfattning om flervariabla funktioner.

1 Geometriska tolkningar

1.1 Förstagradsyta

En förstagradsyta har en ekvation av grad ett, och är geometriskt ett plan, bekant från linjär algebra.

$$ax + by + cz = d \tag{1}$$

1.2 Andragradsytor

Ekvationer av andra graden ger andragradsytor, vilka kan anta flera olika former beroende på hur ekvationen ser ut. Som exempel kan vi ta sfären, en yta formad som en klot, där alla punkter på sfärens yta befinner sig på samma avstånd från sfärens mittpunkt. Sfärens ekvation ser ut som följande:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \tag{2}$$

vilken kan motiveras med hjälp av Pythagoras sats.

Andra ytor som beskrivs av andragradsekvationer är: ellipsoid, formad som en sfär med olika radie i x,y och z-led; cylinder, som består av en cirkelformad bas och rak höjd; kon, en yta formad av två räta linjer som korsar varandra; och paraboloid, formad med böjda sidor.

1.3 Nivåytor

För att kunna definiera nivåytor, behöver vi först definiera en domän.

Definition 1. En delmängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kallas för en domän om den är öppen och bågvis sammanhängande. En mängd är bågvis sammanhängande om $\forall p_1, p_2 \in D$ (punkter i mängden) finns en kontinuerlig kurva som sammanhänger dem.

Definition 2. Låt $f : D \to \mathbb{R}$ där $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är en domän och låt $C \in \mathbb{R}$. Ekvationen $f(x_1, x_2, ..., x_n) = C$ definierar en $(n-1)$-dimensionell nivåhyperyta till f.

T.ex. då $n = 2$ definierar $f(x_1, x_2) = C$ en nivåkurva och när $n = 3$ definierar $f(x_1, x_2, x_3) = C$ en nivåyta.

2 Differentierbarhet

2.1 Differentierbarhet i en variabel

En viktig egenskap som används när man studerar funktioner är deriverbarhet, eller mer allmänt differentierbarhet. För att definiera differentierbarhet i flera variabler kan man först studera hur differentierbarhet definieras för en variabel.

Vi definierar först funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, där den inre punkten a tillhör mängden D.

Den första definitionen man ofta stöter på för deriverbarhet är att gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3}$$

existerar. En andra definition kommer genom linjärisering av f i a. Vi sätter A som gränsvärdet ovan och ansätter $\rho(h)$ till kvoten i (3) minus A. Då får vi ekvationen

$$f(a+h) = f(a) + A \cdot h + h \cdot \rho(h) \tag{4}$$

där $\rho(h)$ går mot 0 när h går mot 0.

Den tredje definitionen får vi genom att rita en bild av funktionens graf, och definierar deriverbarhet som att grafen har en unik tangentlinje i en punkt a.

Vi försöker att generalisera den första definitionen, dvs existens av gränsvärdet till funktioner av två variabler, men upptäcker att man kan närma sig en punkt

(a,b) från oändligt många håll. Istället tänker vi oss att vi närmar oss (a,b) parallellt med x- och y-axeln. På detta sätt deriverar vi en flervariabel funktion med avseende på en av variablerna. Detta kallas för partiella derivator och skrivs:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \tag{5}$$

och på samma sätt med avseende på y, där y-koordinaten av punkten varieras.

2.2 Differentierbarhet i godtyckligt antal variabler

Definition 3 (linjäriseringsformeln)**.** Låt $\mathbf{a}$ vara en inre punkt i definitionsmängden D till en funktion f av n variabler. Vi säger att f är *differentierbar* i punkten $\mathbf{a}$ om det finns konstanter $A_1, ..., A_n$ och en funktion $\rho(\mathbf{h})$ sådana att

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = A_1 h_1 + ... + A_n h_n + ||\mathbf{h}||\rho(\mathbf{h}),\ \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\rho(\mathbf{h}) = 0 \tag{6}$$

Fallet där f är en funktion av två variabler är vanligt förekommande, och linjäriseringsformeln (6) skrivs då på följande sätt

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = A_1 h + A_2 k + \sqrt{h^2+k^2}\rho(h,k),\ \lim_{(h,k)\to(0,0)}\rho(h,k) = 0$$

Utifrån definitionen av differentierbarhet formuleras tre satser.

Sats 1. *f är differentierbar i punkten $\mathbf{a} \Rightarrow f$ är kontinuerlig i $\mathbf{a}$.*

Bevis.

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = A_1 h_1 + ... + A_n h_n + ||\mathbf{h}||\rho(\mathbf{h})$$

Då $\mathbf{h} \to 0$ så går HL mot $0 \Rightarrow$

$$\lim_{h\to 0} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = 0$$

Detta är definitionen för kontinuitet, och f är därmed kontinuerlig i $\mathbf{a}$. □

Sats 2. *En differentierbar funktion f är partiellt deriverbar med*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = A_j,\ j = 1, ..., n$$

där $A_1, ..., A_n$ är talen i formeln för differentieringen av en funktion f av godtyckligt antal variabler.

Bevis. Tag ekvation (6) och sätt $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_j = (0, ..., 0, t, 0, ..., 0)$. Dividera ekvation (6) med t och låt $t \to 0$. Då erhålles

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t\to 0} A_j + \frac{|t|}{t}\rho(t\mathbf{e}_j) = A_j$$

VL i detta uttryck är definitionen för partiella derivatan

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$$

Satsen är därmed bevisad. $\square$

Att via definitionen visa att en funktion är differentierbar kan i praktiken vara mödosamt. Innan vi introducerar en ny metod för att visa differentierbarhet definierar vi mängden $\mathcal{C}^1(D)$.

Definition 4. Låt f vara definierad i en öppen mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$. f sägs vara av klass $\mathcal{C}^1(D)$, alternativt att f tillhör $\mathcal{C}^1(D)$, om f är partiellt deriverbar och om alla dess partiella derivator är kontinuerliga i D.

Med hjälp av definitionen ovan kan vi formulera följande sats.

Sats 3. *Varje funktion f av klassen $\mathcal{C}^1$ är differentierbar.*

3 Gradient och tangentplan

Nu när det är visat att konstanterna A_j i linjäriseringsformeln kan beräknas enligt sats 2 är det lämpligt att samla ihop dem i en enda vektor.

Definition 5. För en funktion $f : D \to \mathbb{R}$ där $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vars partiella derivator existerar i en inre punkt $\mathbf{a} \in D$ definierar vi *gradienten* i $\mathbf{a}$ som vektorn

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

Gradienten tillåter oss att förenkla linjäriseringsformeln till dess slutliga form

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{h} \cdot \nabla f(\mathbf{a}) + ||\mathbf{h}||\rho(\mathbf{h}),\ \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$$

I en variabel vet vi att derivatan ger oss grafens tangentlinjes lutning i en punkt, och att linjäriseringsformeln i en variabel ger oss tangentens ekvation om feltermen ρ försummas. På samma sätt kan vi i två variabler beräkna *tangentplanet* till funktionens graf $z = f(x, y)$. I tre variabler får vi tangentrum i $\mathbb{R}^4$, och i n variabler får vi tangent-n-plan i $\mathbb{R}^{n+1}$.

Till exempel kan vi beräkna tangentplanet till paraboloiden $z = f(x, y) = x^2+y^2$ i punkten $(x_0, y_0, z_0 = x_0^2 + y_0^2)$ genom att bestämma gradienten $\nabla f(x_0, y_0) = (2x_0, 2y_0)$. Tar vi en punkt $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ tillräckligt nära (x_0, y_0) får vi

$$z = f(x_0+h_1, y_0+h_2) \approx f(x_0, y_0)+(h_1, h_2)\cdot(2x_0, 2y_0) = z_0+2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0).$$

Med andra ord har paraboloiden tangentplanet

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Mer generellt kan vi betrakta så kallade *nivåkurvor* på formen $f(\mathbf{v}) = C$, exempelvis sfären

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = f(x, y, z).$$

Är f differentierbar kan vi välja två punkter $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}$ nära varandra på kurvan, dvs. $f(\mathbf{v}_0) = f(\mathbf{v}) = C$. Beräknar vi gradienten $\nabla f(\mathbf{v}_0)$ ger linjäriseringsformeln att

$$f(\mathbf{v}) = C \approx f(\mathbf{v}_0) + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{v}_0) = C + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{v}_0),$$

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{v}_0) \approx 0.$$

Gradienten $\nabla f(\mathbf{v}_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0) = 2\mathbf{v}_0$ är alltså alltid normal mot nivåytan! Tangentplanet har därmed ekvationen

$$(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}) \cdot \nabla f(\mathbf{v}_0) = (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}) \cdot 2\mathbf{v}_0 = 0.$$

I två variabler får vi med samma metod tangentlinjen, och i högre dimensioner fås s.k. *tangenthyperplan.*

4 Riktningsderivator

Låt $D \subseteq \mathbb{R}$ vara en domän, $\mathbf{a} \in D$ och $\hat{\mathbf{u}}$ vara en enhetsvektor i $\mathbb{R}^n$. Riktningsderivatan av en funktion $f : D \to \mathbb{R}$ i punkten $\mathbf{a}$ och i riktningen $\hat{\mathbf{u}}$ ges av

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}} = f_{\hat{\mathbf{u}}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\hat{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{a})}{h}.$$

4.1 Existens av riktningsderivata - sats(2,4,6)

Låt $D \in \mathbb{R}^n$ vara en domän, $\mathbf{a} \in D$. Antag att $f : D \to \mathbb{R}$ är differentierbar i punkten $\mathbf{a}$. Då existerar alla riktningsderivator till f i punkten $\mathbf{a}$ och

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}} = \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla f(\mathbf{a}), \forall \hat{\mathbf{u}}.$$

Satsen ger en bättre tolkning av hur en funktion f växer beroende på vilken riktning man rör sig. Med definitionen av skalärprodukt kan vi skriva: $\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}} = ||\nabla f(\mathbf{a})|| \cos(\theta)$, där θ är vinkeln mellan $\hat{\mathbf{u}}$ och $\nabla f(\mathbf{a})$. Riktningsderivatan är därför beroende av vinkeln θ. Riktningen i vilken en differentierbar funktion f växer respektive avtar snabbast i en punkt $\mathbf{a}$ är i riktningen respektive motsatt riktning till dess gradient $\nabla f(\mathbf{a})$. Funktionen f håller ett konstant värde om man rör sig ortogonalt mot ∇f, ty $\cos(\theta) = 0$ då $\theta = \pi/2 + \pi k, (k \in \mathbb{Z})$.

5 Kedjeregeln

Kedjeregeln i en variabel kan generaliseras i tre steg till att gälla i flera variabler. Denna kan sedan tillämpas bland annat för att göra variabelbyten vid lösning av differentialekvationer av flera variabler.

5.1 Steg 1

Yttre funktion (f) av en variabel och inre funktion (g) av flera variabler.
Betrakta funktionerna

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

som är differentierbara. Sammansättningen

$$f(g(t_1, t_2, ..., t_n)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

är differentierbar och dess partiella derivator ges av

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t_i} f(g(t_1, ..., t_n)) = f'(g(t_1, ..., t_n))\frac{\partial g}{\partial t_i}\\ &i = 1, 2, ..., n\end{aligned}$$

Detta är en direkt konsekvens av kedjeregeln i en variabel och bevisas på samma sätt.

5.2 Steg 2 (Sats 2.3.4)

Yttre funktion (f) av flera variabler och inre funktioner (g_i) av en variabel.
Betrakta dessa funktioner (som alla är differentierbara):

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\\ g_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ g_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ &...\\ g_n &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\end{aligned}$$

Sammansättningen

$$f(g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t))$$

är enligt satsen en differentierbar funktion av t och dess derivata ges av

$$\frac{d}{dt} f(g_1(t), ..., g_n(t)) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p}(g_1(t), ..., g_n(t))\frac{dg_p}{dt}$$

Beviset av denna sats använder framförallt de grundläggande definitioner som har gåtts igenom.

5.3 Steg 3

Yttre funktion (f) av flera variabler och inre funktioner (g_i) av flera variabler. Betrakta dessa funktioner (som alla är differentierbara):

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ g_1 &: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \\ g_2 &: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \\ &... \\ g_n &: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sammansättningen

$$f(g_1(t_1, ..., t_m), g_2(t_1, ..., t_m), ..., g_n(t_1, ..., t_m))$$

är en differentierbar funktion av $t_1, t_2, ..., t_m$ och dess partiella derivator ges av

$$\frac{\partial}{\partial t_p} f(g_1(t_1, ..., t_m), ..., g_n(t_1, ..., t_m)) = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_q}(g_1(t_1, ..., t_m), ..., g_n(t_1, ..., t_m)) \frac{\partial g_q}{\partial t_p}$$

$p = 1, 2, ..., n$

6 Högre ordnings partiella derivator

I envariabelanalysen innebär högre ordnings derivator upprepad derivering och på motsvarande sätt är det även i flervariabelanalysen. Högre ordnings partiella derivator innebär att man upprepat partiellt deriverar. I flervariabelanalys kan man partiellt derivera med avseende på olika variabler. För att urskilja vilka variabler man har partiellt deriverat m.a.p. och i vilken ordning dessa partiella derivationer har utförts finns det några olika notationer. Nedan följer några ekvivalenta notationer för andra ordningens partiella derivator.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = f''_{x_j x_k} = f''_{jk} = f_{x_j x_k}$$

Notationerna ovan skall tolkas som att först partiellt deriveras f m.a.p. x_k och sedan m.a.p. x_j. Ordningen som man utför de partiella derivationerna i visar sig inte ha någon betydelse givet att f uppfyller vissa villkor.

Innan vi visar detta skall vi utöka begreppet $\mathcal{C}^1$ till att gälla ett godtyckligt tal i $\mathbb{N}$.

Definition 6. Om f är definierad i $D \subseteq \mathbb{R}^n$, där D är en domän, så gäller att f tillhör mängden $\mathcal{C}^k(D)$ om alla partiella derivator upp till ordning k existerar och är kontinuerliga i hela D.

Med denna definition kan vi nu formulera Clairaut's sats

Sats 4. *Om $f \in \mathcal{C}^k(D)$, där D är en domän i $\mathbb{R}^n$ så gäller att ordningen i vilken man tar partiella derivator inte spelar någon roll upp till ordning k.*

Exempelvis om $f \in \mathcal{C}^4(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, så gäller för alla $(a, b, c) \in D$ att

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}(a, b, c) = \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial z^2 \partial x}(a, b, c).$$