Veckosammanfattning LV1

A.Svensson, K.Wennerström, L.Karlsson, O.Olander, J.Keijser, A.Johansson

February 7, 2019

1 Introduktion

Vi har i uppgift att skriva en sammanfattning om veckans innehåll i kursen som handlar om analys av funktioner av flera variabler. Detta ska göras på ett sätt sådant att en student som missat veckans innehåll ska kunna läsa och förstå detta dokument.

1.1 Repetition

Vissa förkunskaper krävs för kursen. Till exempel olika geometriska betydelser för första- och andragradsytor i $\mathbb{R}^3$. Den yta som har varit mest central hittills i kursen har varit ett plan som är ett exempel på en förstagradsyta. Planet ges av ekvationen $ax + by + cz = d$, där $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Från linjär algebra minns vi att en normalvektor $\mathbf{n}$ till planet ges av koefficienterna a, b, c, så alltså $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Andragradsytor i $\mathbb{R}^3$ kan vara till exempel:

- Sfär med ekvation $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$, där x_0, y_0, z_0 mittpunkt för sfären och r är radien.
- Ellipsoid med ekvation $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$ där a, b, c är halvaxlar och x_0, y_0, z_0 är mittpunkt för ellipsoiden.
- Cylinder med ekvation $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, där x_0, y_0 mittpunkt och r är radien. Här anses z vara fri.
- Kon med ekvation $z^2 = c(x^2 + y^2)$
- Paraboloid med ekvation $z = c(x^2 + y^2)$

2 Differentialkalkyl

Området som kursen tar upp under denna läsvecka är differentialkalkyl och det första stora begreppet vi stöter på är differentierbarhet. Att en funktion av flera variabler är differentierbar är inte lika enkelt som i envariabelanalys.

Definition för att en funktion av en variabel är differentierbar/deriverbar lyder: Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Vidare låt a vara en inre punkt i D. f är deriverbar i $x = a$ om

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{1}$$

2.1 Partiella derivator

Vi tänker oss grafen till en funktion av en variabel och inser att definitionen enligt ekvation (1) håller eftersom vi endast kan närma oss $x = a$ från höger och vänster.

Om vi har en funktion av flera variabler kan vi närma oss från oändligt många håll så en liknande definition räcker ej för att visa att funktionen är differentierbar. Så därför inför vi begreppet *partiella derivator* och definierar dessa för två variabler.

Definition: Partiella derivator. Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Vidare låt (a, b) vara en inre punkt i D.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}. \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}. \tag{3}$$

Vi säger att ekvation (2) är den partiella derivatan av f med avseende på x och på samma sätt fås att ekvation (3) är den partiella derivatan av f med avseende på y. Om vi studerar närmare ser vi att det som varierar i detta fall är den variabel vi deriverar med avseende på. Vi noterar då att vi endast studerar gränsvärdet då vi närmar oss punkten (a, b) på en koordinataxel.

Vi kan då skala upp och definiera hur de partiella derivatorna fungerar för funktioner av mer än två variabler.
Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Vidare låt $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ vara en inre punkt i D.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e_i}) - f(\mathbf{a})}{h}. \tag{4}$$

Där $i = 1, 2, ..., n$ och $\mathbf{e_i}$ den basvektor som svarar mot koordinaten x_i .

Det som varierar är den variabel vi deriverar med avseende på så alla andra variabler betraktas som konstanter så problemen kan ses som envariabelsproblem.
Exempel 1: Bestäm partiella derivatorna till $f(x, y) = x^3 + y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}$=$3x^2$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$=$2y$

2.2 Differentierbarhet och gradient

Definition: Differentierbarhet, två variabler Låt $f : D \to \mathbb{R}$, där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och låt (a, b) vara en inre punkt i D. f sägs vara differentierbar i (a, b) om

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + A_1 h + A_2 k + \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h, k), \tag{5}$$

där A_1, A_2 är konstanter och $\rho(h, k) \to 0$, då $(h, k) \to (0, 0)$. Om vi istället vill studera funktioner av fler än två variabler kan definitionen skrivas om för ett godtyckligt antal n variabler. Definitionen lyder då enligt följande.

Definition: Differentierbarhet, n variabler Låt $f : D \to \mathbb{R}$, där $D \subseteq \mathbb{R}^n$ och låt $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ vara en inre punkt i D. f sägs vara differentierbar i $\mathbf{a}$ om

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}\rho(\mathbf{h}), \tag{6}$$

där $A_1, ..., A_n$ är konstanter och $\rho(\mathbf{h}) \to 0$, då $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. Notera att om f är differentierbar gäller $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$. Två satser om vad differentierbarhet implicerar är sats 2.2.1 och sats 2.2.2 som säger att:

i) om f är differentierbar i $\mathbf{a} \Rightarrow f$ är kontinuerlig i $\mathbf{a}$.

ii) om f är differentierbar i $\mathbf{a} \Rightarrow$ då existerar alla dess partiella derivator i $\mathbf{a}$.

Definition: Gradient Gradienten för f i punkten $\mathbf{a}$, vilken betecknas av $\nabla f(\mathbf{a})$, ges av

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right) \tag{7}$$

och är alltså en vektor bestående av f's partiella derivator i $\mathbf{a}$. Vi kommer ihåg från linjär algebra att skalärprodukten av $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ och $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$

kan skrivas som

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Med hjälp av gradienten kan alltså definitionen av differentierbarhet (6) skrivas om på följande slutgiltiga sätt.

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\rho(\mathbf{h}), \tag{8}$$

där $\rho(\mathbf{h}) \to 0$, då $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

2.3 C^1

Partiella derivator kan skrivas på följande sätt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = f'_x. \tag{9}$$

Om mängden $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är öppen och bågvis sammanhängande så kallas den en domän. Att en mängd är bågvis sammanhängande innebär att alla par av punkter kan förbindas med en kontinuerlig kurva.

Definition: $\mathbf{C^k}$ Låt mängden $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän. Då definieras C^k på följande sätt:

$$C^0(D) = \{f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ är kontinuerlig i hela } D\}, \tag{10}$$

$$C^k(D) = \left\{ f : D \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} (1)\ f \text{ är kontinuerlig i hela } D. \\ (2) \text{ Alla } f\text{:s partiella derivator upp till ordning } k \\ \text{existerar och är kontinuerliga funktioner i hela } D. \end{array} \right\} \tag{11}$$

Sats: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän. Då gäller:

$$f \in C^1(D) \Rightarrow f \text{ är differienterbar i } D \tag{12}$$

2.4 Kedjeregeln

Vi minns från envariabelanalysen att en sammansatt funktions derivata

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t). \tag{13}$$

Det här går att generalisera för derivering av sammansatta funktioner beroende av mer än en variabel. Detta kommer göras i 3 steg.

Steg 1 Låt f och g vara differentierbara funktioner. Då gäller, som en direkt konsekvens av kedjeregeln i en variabel, att den sammansatta funktionen $f(g(t_\mathbf{1}, t_\mathbf{2}, ..., t_\mathbf{n}))$'s partiella derivata är lika med

$$\frac{\partial}{\partial t_\mathbf{i}}(f(g(t_\mathbf{1}, t_\mathbf{2}, ..., t_\mathbf{n}))) = f'(g(t_\mathbf{1}, t_\mathbf{2}, ..., t_\mathbf{n})) \cdot \frac{\partial g}{\partial t_\mathbf{i}}. \tag{14}$$

Detta eftersom alla variabler förutom $t_\mathbf{i}$ kan betraktas som konstanta.

Steg 2 och sats 2.3.4 Sedan kan vi betrakta funktionerna

$$\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^\mathbf{n} \to \mathbb{R} \\ g_\mathbf{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \vdots \\ g_\mathbf{n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}\right| \text{Där } f \text{ och } g \text{ är differentierbara funktioner} \tag{15}$$

samt den sammansatta funktionen $F(t) = f(g_\mathbf{1}(t), g_\mathbf{2}(t), ..., g_\mathbf{n}(t))$. Här säger **sats 2.3.4** i boken oss att F är en deriverbar funktion av t och att

$$\frac{d}{dt}F(t) = \sum_{p=1}^{\mathbf{n}} \frac{\partial f}{\partial g_\mathbf{p}}(g_\mathbf{1}(t), g_\mathbf{2}(t), ..., g_\mathbf{n}(t)) \cdot \frac{dg_\mathbf{p}}{dt}. \tag{16}$$

Steg 3 Låt oss sedan betrakta funktionerna

$$\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^\mathbf{n} \to \mathbb{R} \\ g_\mathbf{1} : \mathbb{R}^\mathbf{m} \to \mathbb{R} \\ \vdots \\ g_\mathbf{n} : \mathbb{R}^\mathbf{m} \to \mathbb{R} \end{array}\right| \text{Där } f \text{ och } g \text{ är differentierbara funktioner} \tag{17}$$

samt den sammansatta funktionen $F(t) = f(g_{\mathbf{1}}(t_{\mathbf{1}}, t_{\mathbf{2}}, ..., t_{\mathbf{m}}), g_{\mathbf{2}}(t_{\mathbf{1}}, t_{\mathbf{2}}, ..., t_{\mathbf{m}}), ...,$ $g_{\mathbf{n}}(t_{\mathbf{1}}, t_{\mathbf{2}}, ..., t_{\mathbf{m}}))$. Genom en applicering av **sats 2.3.4** från föregående steg vet vi att F är en differentierbar funktion av vektorn $\mathbf{t} = t_{\mathbf{1}}, t_{\mathbf{2}}, ..., t_{\mathbf{m}}$ och att den partiella derivatan är lika med

$$\frac{\partial}{\partial t_{\mathbf{p}}} F(\mathbf{t}) = \sum_{q=1}^{\mathbf{n}} \frac{\partial f}{\partial g_{\mathbf{q}}}(g_{\mathbf{1}}(t_{\mathbf{1}}, t_{\mathbf{2}}, ..., t_{\mathbf{m}}), g_{\mathbf{2}}(t_{\mathbf{1}}, t_{\mathbf{2}}, ..., t_{\mathbf{m}}), ..., g_{\mathbf{n}}(t_{\mathbf{1}}, t_{\mathbf{2}}, ..., t_{\mathbf{m}})) \cdot \frac{\partial g_{\mathbf{q}}}{\partial t_{\mathbf{p}}} \tag{18}$$

Vi har nu lyckats generalisera den tidigare kedjeregeln till även flera variabler.

2.5 Riktningsderivator

När man tar en partiell derivata av en funktion f undersöker man hur f:s värde förändras när man rör sig parallellt med någon av koordinataxlarna i definitionsmängden. För att undersöka f förändringstakt i en godtycklig riktning introduceras begreppet riktningsderivata.

Definition: Riktningsderivata Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän. Låt punkten $\mathbf{a} \in D$ och $\mathbf{u}$ vara en enhetsvektor i $\mathbb{R}^n$. Riktningsderivatan hos funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ i punkten $\mathbf{a}$ i $\mathbf{u}$ riktningen ges av:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = f_{\mathbf{u}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

Kravet att D ska vara en domän är där för att man ska kunna närma sig alla punkter i alla tänkbara riktningar $\mathbf{u}$. Om en funktion f är differentierbar finns följande sats för att beräkna riktningsderivatan.

Sats: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän. Låt $\mathbf{a}$ vara en inre punkt i D och $\mathbf{u}$ vara en enhetsvektor i $\mathbb{R}^n$. Om funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ är differentierbar i punkten $\mathbf{a}$ gäller att alla riktningsderivator existerar i punkten $\mathbf{a}$ och beräknas:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{u} \bullet \nabla f(\mathbf{a}) \tag{19}$$

Vi minns att gradienten, $\nabla f(\mathbf{a})$, är en vektor med de n stycken partiella derivatorna som komponenter. Utvecklar vi ekvation (19) med definitionen av skälarprodukt i

1, 2, eller 3 dimensioner[1] fås olikheten:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \underbrace{\|\mathbf{u}\|}_{=1} \cdot ||\nabla f(\mathbf{a})\| \cos\theta \leq \|\nabla f(\mathbf{a})\| \tag{20}$$

Där θ betecknar den mellanliggande vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\nabla f(\mathbf{a})$. Beroende på i vilken riktning $\mathbf{u}$ man rör sig antar riktningsderivatan olika värden, d.v.s. att f växer olika fort i olika riktningar. Från (20) observerar vi specialfall:

- f växer som snabbast i gradientens riktning.
- f avtar som snabbast i motsatt gradientens riktning.
- f:s lutning är 0 i en ortogonal riktning till gradienten.

Den sista punkten innebär att en differentierbar funktion f har ett konstant värde om man sig ortogonalt mot gradienten. Man betecknar en ekvation på formen $f(x, y) = C$ för nivåkurva, (C konstant). Ett exempel är en cirkel $f(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$, där gradienten är $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ och tangentens riktning är $(y, -x)$. Nivåkurvan, i detta fall en cirkel, har en tangent som är normal till gradienten. På samma sätt har en nivåyta $f(x, y, z) = C$ ett tangentplan, i punkten $\mathbf{a}$, vars normal är gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$. Detta innebär att ekvationen för tangentplanet för $f(x, y, z) = C$ i $\mathbf{a} = (x_0, y_0, z_0)$ ges av:

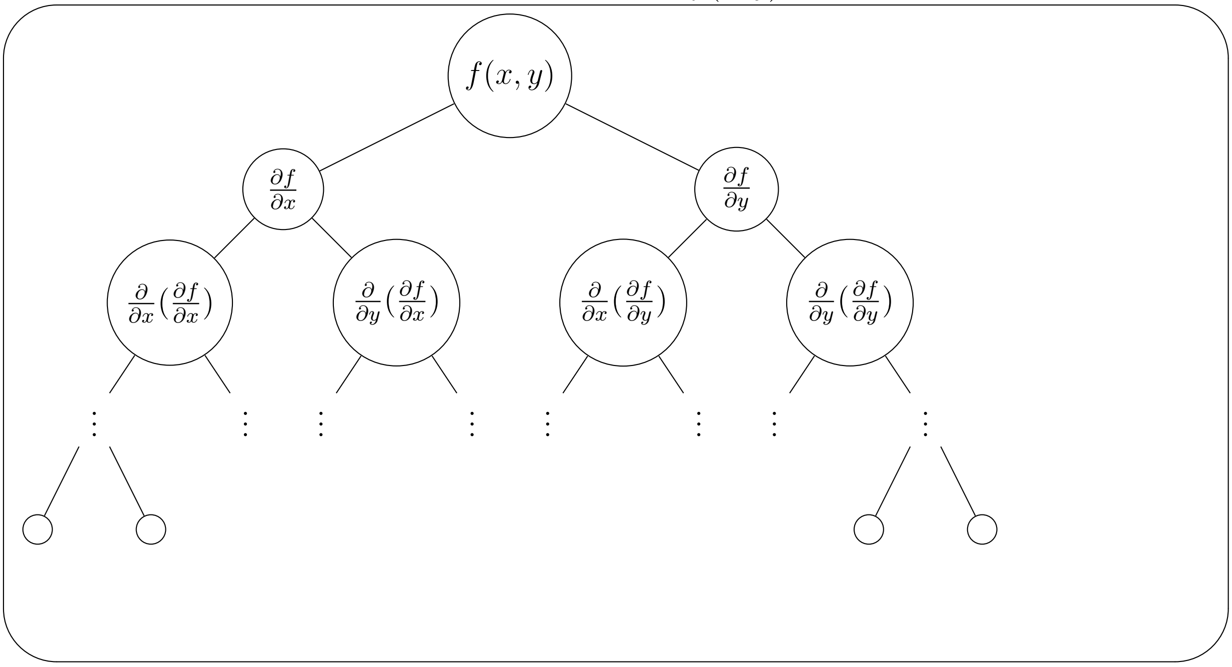
$$\nabla f(\mathbf{a}) \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a}) = 0$$

[1] För vektorer i $\mathbb{R}^n$ kan man bevisa ekvation (20) med Cauchy-Schwarz olikhet som är algebraisk.

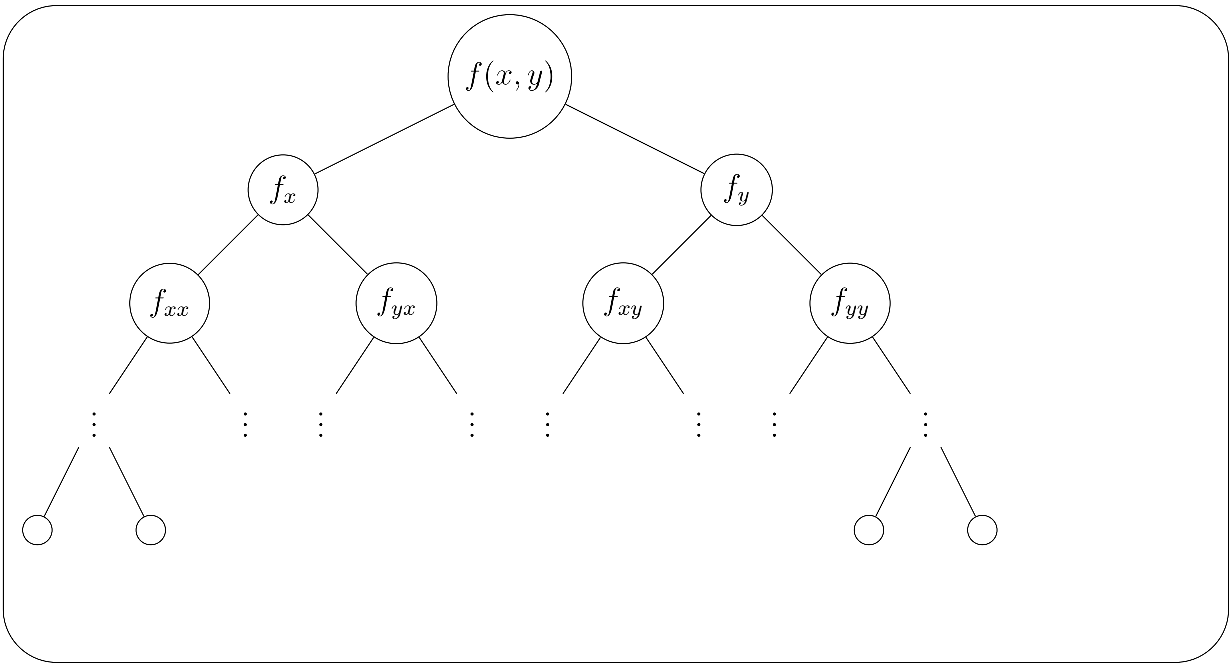
2.6 Derivator av högre ordning

När man har en funktion $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ och skall derivera partiellt med avseende samtliga n variabler blir resultatet n st derivator: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}$. Vidare om man vill derivera varje derivata igen med avseende på samtliga n variabler, växer antalet derivatafunktioner som i en kedjereaktion. Antalet derivator av ordning två blir n^2, ordning tre n^3 och vidare får k'te ordningens derivata n^k derivator.

Detta illustrerades under lektionen med exemplet $f(x, y)$.



Istället för att skriva på detta sätt kan vi som nämns i 2.3 skriva den partiella derivatan med avseende på x som f_x. Det ser ut såhär:



Deriveringen ger oss derivator i vardera träd som har deriverat med avseende på x lika många gånger samt y lika många. Till exempel är i detta fall av andra ordningen som är lika i strukturen. f_{xy} och f_{yx}. För att visa att de är lika använder vi i sats **2.5.9** (***Clairauts***) oss av C^k, åter igen nämnt i 2.3.

Sats 2.5.9 Clairauts Antag $f \in C^k(D)$ där $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är domän. $\implies$ ordningen man tar partiella derivator spelar ingen roll upp till k.

Bevis idéen till denna sats anta att alla partiella detivator existerar och att vi tänker oss en kvadrat. Där det finns två sätt att ta sig från (a,b) till $(a+h, b+k)$. Utifrån det visar vi med hjälp av medelvärdessatsen att $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$