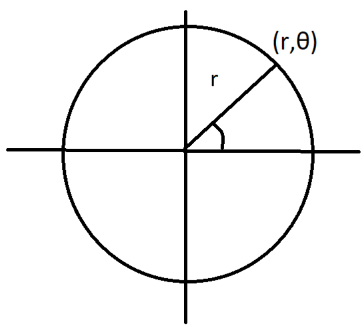
Sammanfattning av läsvecka 2 i Flervariabelanalys

Beatriz Bento Hansson (bento), Emma Johansson (emmb),
Alva Kinman (kinman), Viktoria Löfgren (viklofg),
Oskar Malm (omalm), Hanna Olvhammar (hanolv)

8 Februari 2019

1 Variabelbyten och kedjeregeln

Veckan inleddes med att avsluta föregående veckas ämne om variabelbyten. Ett exempel gällande bytet mellan Cartesiska koordinater och polöra koordinater togs upp och följer nedan.



För $r \in [0, \infty)$ och $\theta \in (0, 2\pi)$ sätter vi

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \Longleftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

Sätt $f : R^2 \to R$, där f är en C^1-funktion. Vi får då

$$f(x, y) = f(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta)).$$

Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

På matrisform:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \implies \\
\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1}
$$

2 Taylors Formel

Sats 2.1. *Låt* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *och låt* $f \in C^3(D)$ *, där* D *är en omgivning av* (a, b)*. Då gäller att:*

$$
\begin{aligned}
f(a+h, b+k) =& f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + \\
&+ \frac{1}{2}(h^2 f_{xx}(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{h}\|^3),
\end{aligned} \tag{2}
$$

där $\boldsymbol{h} = (h, k)$*.*

Bevis. Idén är att med hjälp av kedjeregeln reducera problemet till Taylors sats i en variabel. Tänk att h och k är fixa och betrakta funktionen

$$F : [-1, 1] \to \mathbb{R},$$

där $F(t) = f(a + th, b + tk) = f(g_1(t), g_2(t))$ där $g_1(t) = a + tk$, $g_2(t) = b + tk$.
Kedjeregeln och $f \in C^3(D)$ ger att $F \in C^3((-1, 1))$.
Enligt Taylors sats i en variabel gäller att

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2} \cdot t^2 + \frac{F'''(\xi)}{3!} \cdot t^3 \tag{3}$$

för något $\xi \in (0, t)$.
Definitionen av F ger därmed att

$$
\begin{aligned}
f(a+th, b+tk) =& f(a,b) + t(hf_x(a,b) + kf_y(a,b)) + \\
&+ \frac{t^2}{2}(h^2 f_{xx}(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)) + \\
&+ \frac{t^3}{3!}(h^3 f_{xxx}(a+\xi h, b+\xi k) + 3h^2 k f_{xxy}(a+\xi h, b+\xi k) + \\
&+ 3hk^2 f_{xyy}(a+\xi h, b+\xi k) + k^3 f_{yyy}(a+\xi h, b+\xi k)).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Sätt $t = 1$. Då fås

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) =& f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + \frac{1}{2}(h^2 f_{xx}(a,b)+ \\ &+2hkf_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{h}\|^3), \end{aligned} \tag{5}$$

där $\boldsymbol{h} = (h,k)$ och $\|\boldsymbol{h}\| = \sqrt{h^2+k^2}$.

□

Feltermen vid en Taylorutveckling av grad två fås med hjälp av F:s tredjederivata som ser ur som följer:

$$F''' = D^3 f = (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^3 f = (h^3 f_{xxx} + 3h^2 k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy}) \tag{6}$$

På samma sätt går det, med hjälp av F:s $(n+1)$:te derivata, att ta fram feltermen vid en Taylorutveckling av grad n.

2.1 Generalisering av Taylors sats till fler variabler och högre ordning

Låt $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ och $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ och $f \in C^{k+1}(D)$, där D är en omgivning till $\boldsymbol{a}$. Sätt $F(t) := f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h})$. Då gäller

$$\begin{aligned} &\xrightarrow[\text{regeln}]{\text{Kedje-}} F \in C^{k+1}([-1,1]) \\ &\Rightarrow F(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{F^{(j)}(0)}{j!} t^j + \frac{F^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} t^{(k+1)}, \end{aligned} \tag{7}$$

där $\xi \in (0,t)$ enligt Taylors sats i en variabel.
Kedjeregeln ger vidare:

$$F'(t) = Df,$$

där

$$D = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\nabla}$$

och

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}), \quad \boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$$

$\Rightarrow$ Induktivt: $F^{(j)} = D^j f = (\boldsymbol{h} \cdot \nabla)^j f$.
Insättning i F:s Taylorutveckling ger:

$$f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(\boldsymbol{h} \cdot \nabla)^j}{j!} f(\boldsymbol{a}) \cdot t^j + \frac{(\boldsymbol{h} \cdot \nabla)^{k+1} f(\boldsymbol{a} + \xi \boldsymbol{h})}{(k+1)!} t^{k+1},$$

där $\xi \in (0,t)$. Slutligen, sätt $t = 1$, så fås Taylors sats för funktioner av godtycklig ordning och godtyckligt antal variaber.

2.2 Taylors Sats

Taylors sats blir alltså

Sats 2.2. *För funktionen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $f \in C^{k+1}(D)$, punkten $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, där D är en omgivning till punkten $\boldsymbol{a}$ gäller*

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^j}{j!} f(\boldsymbol{a}) + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{h}\|^{k+1})$$

3 Kritiska punkter

Definition 3.1. *Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. f säges ha ett lokalt minimum (respektive maximum) i $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ om f är definierad i en omgivning av $\boldsymbol{a}$, och det finns ett $\delta > 0$ sådant att*

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta \Longrightarrow f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a}). \tag{8}$$

Vänsterledet i (8) implicerar istället $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$ då $\boldsymbol{a}$ då f har ett lokalt maximum i $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$.

Proposition 3.2. *Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Om f har en lokal extrempunkt i $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ och är differentierbar i $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, så gäller att $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.*

Bevis. f är differentierbar $\Rightarrow f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h}\cdot\nabla f(\boldsymbol{a}) + |\boldsymbol{h}|\,\rho(\boldsymbol{h})$,
där $\rho(\boldsymbol{h}) \to 0, \boldsymbol{h} \to 0$.

Antag $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq 0$. Sätt $\boldsymbol{v} = \nabla f(\boldsymbol{a})$. Välj $\boldsymbol{h} = h\boldsymbol{v} \Rightarrow \boldsymbol{h}\cdot\nabla f(\boldsymbol{a}) = h\,|\boldsymbol{v}|^2$.

Detta ger: $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = h\,|\boldsymbol{v}|^2 + h\,|\boldsymbol{v}|\,\rho(h)$.

Vi ser att $h\,|\boldsymbol{v}|^2$ dominerar för små h, och alltså kommer denna term att avgöra tecknet för skillnaden $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})$ om h blir tillräckligt litet.
h positivt $\Rightarrow f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) > 0$
h negativt $\Rightarrow f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) < 0$

Alltså kan skillnaden vara både strängt positiv och strängt negativ för godtyckligt små h, och funktionen kan inte ha en extrempunkt i $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$. Antagandet $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq 0$ är alltså felaktigt $\Rightarrow \nabla f(\boldsymbol{a}) = 0$.

□

Definition 3.3. *Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara differentierbar i punkten $\boldsymbol{a}$. Punkten $\boldsymbol{a}$ sägs vara en kritisk (eller stationär) punkt till f om $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.*

Definition 3.4. *En funktion $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kallas för en binär kvadratisk form om det finns konstanter A, B och C sådana att*

$$Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2. \tag{9}$$

Definition 3.5. *Om funktionen Q är på en binär kvadratisk form sägs Q vara*

- ***positiv definit*** *om $Q(x, y) > 0$ för alla $(x, y) \neq (0, 0)$*
- ***negativ definit*** *om $Q(x, y) < 0$ för alla $(x, y) \neq (0, 0)$*
- ***indefinit*** *om $Q(x_1, y_1) > 0$ och $Q(x_2, y_2) < 0$ för några punkter $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$*
- ***positiv semidefinit*** *om $Q(x, y) \geq 0$ och $Q(x_1, y_1) = 0$ för någon punkt $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$*
- ***negativ semidefinit*** *om $Q(x, y) \leq 0$ och $Q(x_1, y_1) = 0$ för någon punkt $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$*

3.1 Klassificering av kritiska punkter

Låt $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^3$ i sin definitionsmängd och låt (a, b) vara en kritisk punkt till f. Taylors formel ger att

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) =& \nabla f(a, b) \cdot (h, k) + \\ & + \frac{1}{2}(h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b)) + \\ & + \mathcal{O}(\sqrt{h^2 + k^2}^3). \end{aligned} \tag{10}$$

Eftersom (a, b) är en kritisk punkt gäller att $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$, och formeln kan skrivas om till

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Q(h, k) + \mathcal{O}(\sqrt{h^2 + k^2}^3), \tag{11}$$

där $Q(h, k)$ är en binär kvadratisk form. Vi ser att tecknet på $f(a + h, b + k) - f(a, b)$ kommer att bestämmas av tecknet på $Q(h, k)$ för tillräckligt små $\boldsymbol{h}$. Vilken typ av punkt (a, b) är beror alltså på om Q är positiv definit, negativ definit etc, vilket leder till följande sats.

Sats 3.6. *Låt f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ och $f \in C^3$. Låt (a, b) vara en stationär punkt till f. Sätt $A = f_{xx}(a, b), B = f_{xy}(a, b)$ och $C = f_{yy}(a, b)$. Observera $f_{xy} = f_{yx}$ då $f \in C^3$.* ***Då gäller följande:***

(i) Om $AC - B^2 > 0$ och $A > 0 \Longrightarrow (a, b)$ är lokalt minimum

(ii) Om $AC - B^2 > 0$ och $A < 0 \Longrightarrow (a, b)$ är lokalt maximum

(iii) Om $AC - B^2 < 0 \Longrightarrow (a, b)$ är en sadelpunkt

Anmärkning: $AC - B^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$. Alltså, $AC - B^2 =$ determinanten av matrisen vilket gör att man kan generalisera denna sats till godtyckligt många variabler.

4 Vektorvärda funktioner

Hittills i kursen har vi främst studerat skalärvärda funktioner, dvs funktioner från $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. En funktion $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m > 1$, kallas en vektorvärd funktion. $\boldsymbol{F}$ består då av m st skalärvärda funktioner:

$$\boldsymbol{F}(x_1, x_2, ..., x_n) = (F_1(x_1, x_2, ..., x_n), F_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., F_m(x_1, x_2, ..., x_n)) \tag{12}$$

$\boldsymbol{F}$ sägs vara differentierbar om alla F_i, $i = 1, 2, ..., m$, är differentierbara.

4.1 Linjäriseringsformeln för vektorvärda funktioner

Om $\boldsymbol{F}$ är differentierbar är varje F_i differentierbar, där $i = 1, ..., m$. Därmed kan vi skriva upp linjäriseringsformeln för varje enskilt F_i:

$$F_i(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = F_i(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h} \cdot \nabla F_i(\boldsymbol{a}) + |\boldsymbol{h}|\rho(\boldsymbol{h}) \tag{13}$$

Med hjälp av denna formel kan vi skriva upp en linjäriseringsformel för hela $\boldsymbol{F}$:

$$\begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) \\ F_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) \\ \vdots \\ F_m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{a}) \\ F_2(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ F_m(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} + |\boldsymbol{h}| \begin{bmatrix} \rho_1(\boldsymbol{h}) \\ \rho_2(\boldsymbol{h}) \\ \vdots \\ \rho_m(\boldsymbol{h}) \end{bmatrix} \tag{14}$$

Matrisen med alla de partiella derivatorna av $\boldsymbol{F}$ i $\boldsymbol{a}$ kallas $\boldsymbol{F}$:s funktionalmatris eller Jacobimatris och betecknas $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{a})$. Med detta kan vi formulera matrisformeln på ett mer kompakt sätt:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} + |\boldsymbol{h}| \cdot \overrightarrow{\rho}(\boldsymbol{h}) \tag{15}$$

där $\overrightarrow{\rho}(\boldsymbol{h})$ är vektorn av funktionerna $\rho_1, \rho_2, ...\rho_m$ som alla går mot 0, då $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$.

4.2 Kedjeregeln för vektorvärda funktioner

Sats 4.1. *Låt $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, och $\boldsymbol{G} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. Vi kan då skapa en sammansatt funktion $\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{G} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$. Funktionalmatrisen av den sammansatta funktionen är*

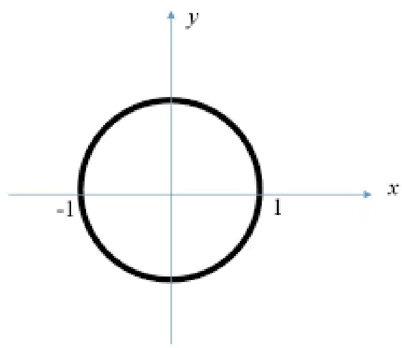
$$(\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{G})' = \boldsymbol{F}' \cdot \boldsymbol{G}'. \tag{16}$$

4.3 Specialfallet $m = n$

Om vi har en funktion $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, där definitonsmängden och målmängden tillhör samma rum $\mathbb{R}^n$, kallas den ett n-dimensionellt vektorfält.
Om $\boldsymbol{F}$ dessutom är bijektiv, så kan den betraktas som ett variabelbyte. Ett exempel på detta i $\mathbb{R}^2$ är bytet mellan polära och Cartesiska koordinater,

$$\boldsymbol{F}(r, \theta) = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta). \tag{17}$$

5 Implicita funktionssatsen



Betraktar vi nivåkurvan $F(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ är det tydligt att den inte går att beskriva som en funktion $y = f(x)$. Däremot kan nivåkurvan i omgivningar av punkter på nivåkurvan, med undantag för punkterna där $y = 0$, beskrivas som funktioner. I en omgivning av $y = 0$ kan inte nivåkurvan beskrivas som en funktion eftersom det för $|x| < 1$ kommer finnas två y-värden för varje x-värde. Notera även att i dessa punkter, där $y = 0$, är

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{18}$$

Detta leder oss in på formuleringen av den implicita funktionssatsen.

Sats 5.1. *Låt $F(x, y)$ vara en C^1 funktion och (a, b) vara en punkt på nivåkurvan $F(x, y) = C$. Om $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$, finns det en öppen omgivning U av (a, b) så att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definerar en C^1-funktion $y = f(x)$ och*

$$f'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) / \frac{\partial F}{\partial y}(a, b). \tag{19}$$

Den implicita funktionssatsen går även att generalisera.