Tavelpresentation LV 2

Daniel Olander
Albin Widengård
Borik Ronnby
Mattias Wiklund
Tobias Sundin
Willem de Wilde

8 februari 2019

Innehåll

1 Variabelbyte i partiella differentialekvationer

För att lösa partiella differentialekvationer är det ofta nödvändigt att transformera den givna ekvationen till nya koordinater. Beräkning och insättning av de partiella derivatorna kan med ett smart variabelbyte förenkla ekvationen. Ett exempel på detta presenteras nedan.

PB 2.59

Bestäm den allmänna C^2- lösningen till differentialekvationen

$$x f_{xx} - y f_{xy} + f_x = 0 \tag{1}$$

där $y > 0$ med hjälp av variabelbytet

$$\begin{cases} u = y \\ v = xy \end{cases} \tag{2}$$

Lösning:

Med detta variabelbyte kan funktionen skrivas som $f(u(x,y), v(x,y))$, där u och v är funktioner av x och y.

Beräkning av f_x

$$f_x = f_u \frac{\partial u}{\partial x} + f_v \frac{\partial v}{\partial x}$$

där

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{och} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y$$

ger

$$f_x = f_v y.$$

För att beräkna den partiella derivatan av andra ordningen f_{xx} behöver produktregeln användas enligt

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_v y) = \frac{\partial}{\partial x}(f_v) y + \frac{\partial}{\partial x}(y) f_v.$$

Vidare beräknas

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_v) = f_{uv} \frac{\partial u}{\partial x} + f_{vv} \frac{\partial v}{\partial x} = f_{vv} y$$

och

$$\frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

som alltså ger

$$f_{xx} = f_{vv} y^2.$$

Eftersom funktionen av klass C^2 kan nu f_{xy} beräknas som

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_x) = \frac{\partial}{\partial y}(f_v y) = \frac{\partial}{\partial y}(f_v)y + \frac{\partial}{\partial y}(y)f_v.$$

På liknande sätt som ovan fås

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_v) = f_{uv}\frac{\partial u}{\partial y} + f_{vv}\frac{\partial v}{\partial y} = f_{uv} + f_{vv}x$$

och

$$\frac{\partial}{\partial y}(y) = 1$$

och alltså blir

$$f_{xy} = (f_{uv} + f_{vv}x)y + f_v.$$

Insättning av uttrycken för de partiella derivatorna f_x, f_{xx} och f_{xy} i (1) ger nu efter förenkling

$$f_{uv}y^2 = 0.$$

Eftersom det är givet att $y > 0$ löses ekvationen då $f_{uv} = 0$. Detta kan skrivas som

$$\frac{\partial}{\partial v}(f_u) = 0.$$

Integration av båda leden med avseende på v ger

$$f_u = C_1(u)$$

där $C_1(u)$ är en godtycklig funktion av u. Att inte en vanlig konstant tillsätts kan inses genom att partiellt derivera denna ekvation med avseende på v, då den godtyckliga funktionen av u endast ses som en konstant och alltså förvinner. Integrering med avseende på u ger nu

$$f(u,v) = C_2(u) + G(v)$$

där $C_2(u)$ och $G(v)$ är godtyckliga och tillräckligt många gånger deriverbata funktioner av u och v. Återgång till de ursprungliga variablerna ger nu svaret

$$f(u,v) = C_2(y) + G(xy)$$

där C_2 och G är godtyckliga och tillräckligt många gånger deriverbata funktioner som skulle kunna bestämmas explicit med begynnelsevillkor.

2 Taylors formel i flera variabler

Vi vet att Taylorutvecklingen i punkten a till en funktion f beroende på en variabel är:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{f^{(k+1)}(\delta)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} \tag{3}$$

Där $k \in \mathbb{N}$ och $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tillhör klassen $C^{k+1}(D)$, där D är en omgivning till a. Detta gäller för något $x \in D$ och för något $\delta \in (a,x)$.

2.1 Utveckling av funktion av två variabler till ordning två

Ett naturligt första steg för att utvidga Taylors formel till flera variabler är en enkel utveckling i två variabler. Här utvecklar vi till andra ordningens Taylorpolynom.

För att förenkla uträkningarna gör vi ett variabelbyte:
Vi sätter $x = a + h$ och $\delta \in (a,a+h)$, och får alltså

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{j}(a)}{j!}h^j + \frac{f^{k+1}(\delta)}{(k+1)!}h^{k+1} \tag{4}$$

.
Målet är att approximera en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kring baspunkten (a,b), det vill säga uppskatta värdet för $f(a+h,b+k)$ för $(h,k) \approx (0,0)$.

Men för att få använda Taylors formel måste vi först reducera den aktuella funktionen i två variabler till en funktion i en varibel. För att göra det använder vi oss av ett trick:

Vi sätter $F(t) = f(a+th,b+tk)$, vilket kan ses som att vi närmar oss punkten (a,b) längs den fixerade vektorn (h,k), och låter den nya variablen t representera avståndet till baspunkten.

F:s derivator kan relateras till f:s via kedjeregeln. En enkel derivering med avseende på t ger att $F'(t) = (\frac{d}{dx}h + \frac{d}{dy}k)f$.

Vi ser att $D = \frac{d}{dx}h + \frac{d}{dy}k$ fungerar som en s.k. differentialoperator, det vill säga att multiplikation med operatorn D är ekvivalent med derivering av funktionen. Formellt är D en funktion från $C^1 \to C^{k-1}$ för ett valfritt k. Allmänt gäller att: $F^{(k)}(t) = D^k f$, vilket vi nu kan applicera för att ta fram andraderivatan $F''(t)$.

$F'' = D^2 f = D(Df) = (\frac{df}{dx}h + \frac{df}{dy}k)(\frac{df}{dx}h + \frac{df}{dy}k)f = (\frac{df}{dx}h + \frac{df}{dy}k)^2 f =$
$((h\frac{d}{dx})^2 + 2(h\frac{d}{dx})(k\frac{d}{dy}) + (k\frac{d}{dy})^2)f = (h^2\frac{d^2}{dx^2} + 2hk\frac{d^2}{dxdy} + k^2\frac{d^2}{dy^2})f.$

Vi är nu redo att sätta in andraderivatan i Taylorsformel. Vi vet att $f(a+h,b+k) = F(1)$. En Maclaurinutveckling av F med t = 1 ger oss alltså den approximation vi söker. Insättning ger:

$$f(a+h,b+k) = F(1) = F(0) + F'(0)1 + \frac{F''(0)}{2}1^2 + \frac{F^{(3)}(\delta)}{6}1^3 \tag{5}$$

För något $\delta \in (0,1)$.
Om vi uttrycker F' och F'' med hjälp av de partiella derivator som vi tagit fram

tidigare får vi att $f(a+h,b+k)$ är lika med:

$$f(a,b)+hf_x(a,b)+kf_y(a,b)+\frac{1}{2}(h^2f_{xx}(a,b)+2hkf_{xy}(a,b)+k^2f_{yy}(a,b))+\mathcal{O}(\| (h,k) \|^3) \tag{6}$$

Vi noterar slutligen att för att detta ska vara giltigt så $f \in C^3$ i en omgivning av (a,b).

2.2 Taylors formel för högre ordningens utvecklingar:

För allmänt uttryck av Taylorutveckling i k:te ordning finns följande två uttryck:

- Taylorutveckling av två variabler (a,b) då $f \in C^{k+1}, (a,b) \in \mathbb{R}$

$$f(a+h,b+k) = \sum_{i=0}^{k} D^{(i)}\frac{f(a,b)}{i!} + \mathcal{O}(\| \vec{h} \|^{k+1}) \tag{7}$$

$$D^{(i)} = (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^i = (\vec{h} \cdot \triangledown) \tag{8}$$

D i ekvation 8 är differnetialoperatorn som verkar på funktionen i ekvation 7.
Där gradienten $\triangledown = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ och vektorn $\vec{h} = (h,k)$

- Taylorutveckling av n stycken godtyckliga variabler då $\vec{a} \in \mathbb{R}^n, f \in C^{k+1}$

$$f(\vec{a}+\vec{h}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(\vec{h} \cdot \triangledown)^i}{i!} f(\vec{a}) + \mathcal{O}(\| \vec{h} \|^{k+1}) \tag{9}$$

Där vektorn $\vec{h} = (h_1,h_2,....,h_n)$ och gradienten $\triangledown = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2},....,\frac{\partial}{\partial x_n})$

3 Klassificering av kritiska punkter

Följande definition definierar en så kallad binär kvadratisk form.

Definition: En funktion $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kallas för en binär kvadratisk form om den är på formen

$$Q(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \tag{10}$$

där A,B,C är konstanter.

Följande definition definierar olika klassificeringar av den binära kvadratiska formen Q.

Definition: $Q(x,y)$ sägs vara:

1. Posititiv definit, om: $Q(x_1,y_1) > 0$ då $(x,y) \neq (0,0)$. Exempel: $x^2 + y^2$.
2. Negativ definit, om: $Q(x_1,y_1) > 0$ då $(x,y) \neq (0,0)$. Exempel: $-x^2 - y^2$.
3. Indefinit, om: $Q(x_1,y_1) > 0$, $Q(x_2,y_2) < 0$. Exempel: $x^2 - y^2$.
4. Positiv semidefinit, om: $Q(x_1,y_1) \geq 0$ & $Q(x_2,y_2) = 0$, $\exists(x_2,y_2) \neq (0,0)$.
5. Negativ semidefinit, om: $Q(x_1,y_1) \leq 0$ & $Q(x_2,y_2) = 0$, $\exists(x_2,y_2) \neq (0,0)$.

Följande sats säger hur föregående definition kan användas för att avgöra vilken typ av kritisk punkt som studeras.

Sats:

1. $Q(h,k)$ positivt definit $\Rightarrow$ (a,b) är ett strängt lokalt minimum.
2. $Q(h,k)$ negativt definit $\Rightarrow$ (a,b) är ett strängt lokalt maximum.
3. $Q(h,k)$ indefinit $\Rightarrow$ (a,b) är varken ett lokalt minimum eller maximum, utan är en så kallad sadelpunkt.

Det finns även en sats som säger hur det från koefficienterna i den binära kvadratiska formen Q kan avgöras vilken klass den tillhör. Satsen gäller om vi har krav på A, B och C. De vanliga kraven (alltid, om funktionen är C^2) är: $A = f_{xx}(a,b)$, $B = f_{xy}(a,b)$ och $C = f_{yy}(a,b)$.

Sats: Låt $Q(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$. Då gäller:

1. $AC - B^2 > 0$ och $A > 0 \Rightarrow Q$ är positiv definit.
2. $AC - B^2 > 0$ och $A < 0 \Rightarrow Q$ är negativ definit.
3. $AC - B^2 > 0 \Rightarrow Q$ är indefinit.
4. $AC - B^2 = 0 \Rightarrow Q$ är semidefinit.

4 Vektorvärda funktioner

Definition: Låt $m,n \in \mathbb{N}$. En funktion $\vec{\boldsymbol{F}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kallas för en vektorvärd funktion. I specialfallet då $m = 1$ kallas funktionen för en skalärvärd funktion.

$$\vec{\boldsymbol{F}}(x_1, ..., x_n) = (F_1(x_1, ..., x_n), ..., F_m(x_1, ..., x_n))$$

där varje F_i $(i = 1, 2, ..., m)$ är en skalärvärd funktion av n variabler.

Definition: $\vec{\boldsymbol{F}}$ sägs vara differentierbar om varje F_i är differentierbar.

4.1 Linjärisering av vektorvärda funktioner

Låt $\vec{\boldsymbol{F}}$ vara som i föregående stycke. Om varje F_i är differentierbar i punkten $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n$ betyder att varje F_i kan linjäriseras. Där med är

$$F_i(\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{h}}) = F_i(\vec{\boldsymbol{a}}) + \vec{\boldsymbol{h}} \cdot \nabla F_i(\vec{\boldsymbol{a}}) + |\vec{\boldsymbol{h}}| \cdot \rho_i(\vec{\boldsymbol{h}}), \text{ där } \rho_i(\vec{\boldsymbol{h}}) \to 0 \text{ då } \vec{\boldsymbol{h}} \to \vec{\boldsymbol{0}}_n.$$

Minns från linjär algebra att skalär produkten mellan två vektorer $\vec{\boldsymbol{u}}$ och $\vec{\boldsymbol{v}}$ kan skrivas med hjälp av matriser som $\boldsymbol{u}^T * \boldsymbol{v}$, där $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är kolonnvektorer.

$\Rightarrow \mathrm{F}_i(\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{h}}) = F_i(\vec{\boldsymbol{a}}) + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x_1}(\vec{\boldsymbol{a}}) & \dots & \frac{\partial F_i}{\partial x_n}(\vec{\boldsymbol{a}}) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} + |\vec{\boldsymbol{h}}| \cdot \rho_i(\vec{\boldsymbol{h}})$, där $\rho_i(\vec{\boldsymbol{h}}) \to 0$ då $\vec{\boldsymbol{h}} \to \vec{\boldsymbol{0}}_n$. Detta gäller för alla $i = 1, 2, ..., m$. Om vi ställer upp alla m stycken ekvationer på varandra i en kolumn får vi:

$$\begin{bmatrix} F_1(\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{h}}) \\ \vdots \\ F_m(\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{h}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\vec{\boldsymbol{a}}) \\ \vdots \\ F_m(\vec{\boldsymbol{a}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{\boldsymbol{a}}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{\boldsymbol{a}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{\boldsymbol{a}}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{\boldsymbol{a}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} + |\vec{\boldsymbol{h}}| \begin{bmatrix} \rho_1(\vec{\boldsymbol{h}}) \\ \vdots \\ \rho_m(\vec{\boldsymbol{h}}) \end{bmatrix}.$$

Linjäriseringsformeln för vektorvärda funktioner blir alltså:

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{h}}) = \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{a}}) + \vec{\boldsymbol{F}}'(\vec{\boldsymbol{a}}) * \vec{\boldsymbol{h}} + |\vec{\boldsymbol{h}}| \cdot \vec{\boldsymbol{\rho}}(\vec{\boldsymbol{h}}).$$

$\vec{\boldsymbol{F}}'(\vec{\boldsymbol{a}})$ kallas för funktionalmatrisen eller Jacobimatrisen för den C^1-vektorvärda funktionen $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{a}})$.

4.2 Kedjeregeln för vektorvärda funktioner

Låt $\vec{\boldsymbol{F}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $\vec{\boldsymbol{G}} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ vara två vektorvärda funktioner som är C^1 och låt $\vec{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^p$. Då är $(\vec{\boldsymbol{F}} \circ \vec{\boldsymbol{G}})'(\vec{\boldsymbol{a}}) = \vec{\boldsymbol{F}}'(\vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{a}})) * \vec{\boldsymbol{G}}'(\vec{\boldsymbol{a}})$. Kedjeregeln fungerar alltså på samma sätt för vektorvärdafunktioner som för ”vanliga” skalärvärdafunktioner.

4.3 Funktionaldeterminanter

Betrakta nu specialfallet då den vektorvärda funktionen $\vec{\boldsymbol{y}} = \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}})$ är definierad i $\mathbb{R}^n$ med värden i $\mathbb{R}^n$. Det gäller alltså att $\vec{\boldsymbol{F}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. En sådan här funktion kallas för ett n-dimensionellt vektorfält.

Givet en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ kan vi beräkna determinanten för dess avbildningsmatris. Utifrån detta kan egenskaper hos avbildningen erhållas. På liknande vis kan vi för ett n-dimensionellt vektorfält beräkna determinanten för dess funktionalmatris. **Funktionaldeterminanten** beteckans enligt följande:

$$\det(\vec{\boldsymbol{F}}'(\vec{\boldsymbol{x}})) = \frac{d(F_1,...,F_n)}{d(x_1,...,x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{\boldsymbol{x}}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{\boldsymbol{x}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{\boldsymbol{x}}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{\boldsymbol{x}}) \end{vmatrix}$$

Det är särskilt viktigt att studera funktionaldeterminanten för en funktion vid variabelbyten i $\mathbb{R}^n$ (exempelvis bytet från kartetiska koordinater till polära koordinater i $\mathbb{R}^2$). Det gäller att ett sådant koordinatbyte endast är tillåtet då $\vec{\boldsymbol{F}}$ är bijektiv.

Då A är en $n \times n$-matris gäller följande ekvivalenser: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ inverterbar $\Leftrightarrow$ linjära avbildningar med avbildningsmatris A är bijektiva. Med utgångspunkt i detta kan den **inversa funktionssatsen** (sats 3.3.2 i Persson-Böiers) formuleras.

4.4 Inversa funktionssatsen

Sats: Låt $\vec{\boldsymbol{y}} = \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}})$ vara en C^1-funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ och $\vec{\boldsymbol{a}}$ en punkt i definitionsmängden sådan att

$$\det(\vec{\boldsymbol{F}}'(\vec{\boldsymbol{a}})) \neq 0.$$

$\Rightarrow \exists$ öppna omgivningar U och V av $\vec{\boldsymbol{a}}$ respektive $\vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{a}})$ sådana att

$$\vec{\boldsymbol{F}} : U \to V$$

är bijektiv och inversen $\vec{\boldsymbol{F}}^{-1} : V \to U$ också är en en funktion av klass C^1.

Essensen i denna sats är således att en nollskild funktionaldeterminant för en funktion $\vec{\boldsymbol{F}}$ i punkten $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{a}}$ ger att $\vec{\boldsymbol{F}}$ är bijektiv. Därmed är ett variabelbyte tillåtet, åtminstone i en omgivning av $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{a}}$.