Sammanfattning Lv3 MVE035 Flervariabelanalys

Filippa Kruse	krusef
David Hambraeus	davham
Adam Hasselwander	adamhas
Viktor Nevelius Wernholm	viknev
Algot Lundahl	algotl
Oliver Olsson	oliolss

February 2019

1 Implicita funktionssatsen

Sats. *Låt $F(\vec{x})$ vara en C^1-funktion av n variabler, F: $R^n \to R$, dvs. $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ och låt $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ vara en punkt på nivåhyperytan $F(\vec{x}) = C$, dvs. $F(\vec{a}) = C$.*

Om

$$\frac{\partial F(\vec{a})}{\partial x_k} \neq 0$$

så medför det att det finns en omgivning U av $\vec{a}$ så att restriktionen av nivåhyperytan till U implicit definierar x_k som en C^1-funktion av de andra variablerna

$$x_k = f_k(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n)$$

och

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_k(a_1, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_n) = \frac{-F_i(\vec{a})}{F_k(\vec{a})}, i \neq k.$$

2 Intuitiv förklaring av integration i flera variabler

Låt $f(x, y), f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, vara en kontinuerlig funktion av två variabler och låt D vara ett begränsat område i xy-planet. Vi kan då informellt definiera

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

som den tecknade volymen mellan grafen $z = f(x, y)$ och området D i xy-planet. Det motiveras av att $f(x, y)$ motsvarar en tecknad höjd och $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ en infinitesimal area.

3 Tekniker för beräkning av dubbelintegral

1. Inspektion och symmetrier

   Utnyttjande av den informella definitonen av dubbelintegral samt symmetrier i integranden och i integrationsområdet.

2. Fubinis sats
3. Variabelbyten
4. Nivåkurvor

4 Fubinis sats

4.1 För rektanglar

Sats (Fubinis sats för rektanglar, 6.1.3)**.** *Om $f(x, y)$ är kontinuerlig på rektangeln*

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

så medför detta att $\iint_\Delta f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ existerar och att

$$\begin{aligned}\iint_\Delta f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y \\ &= \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Beviside: För ett fixt x gäller att $f(x, y) = g(y)$. Då f är kontinuerlig på rektangeln gäller att

$$\int_c^d g(y)\mathrm{d}y = \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$$

existerar och är någon funktion av x, kalla den $h(x)$. Då gäller att

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = \iint_\Delta f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

och då $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x$ existerar existerar även $\iint_\Delta f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4.2 För reguljära ytor

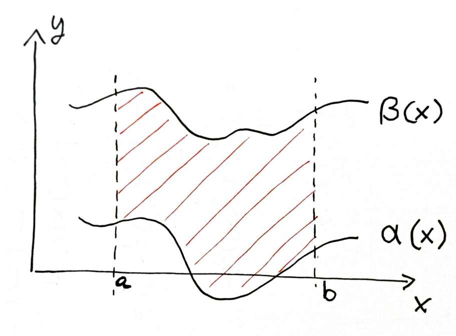
Definition 1. *Låt Δ vara*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

där $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga funktioner sådana att

$$\alpha(x) \leq \beta(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Ett sådant område kallas reguljärt och ett exempel visas i figur 1.



Figur 1: Exempel på en reguljär yta

Sats (Fubinis sats för reguljära ytor, 6.2.4)**.** *Om $f(x, y)$ är kontinuerlig på ett reguljärt område Δ som i definition 1 så gäller att*

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

existerar och är lika med

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \mathrm{d}y.$$

4.3 Intuitiv förklaring av Fubinis sats

Dubbelintegralen kan tolkas som den tecknade volymen mellan området Δ och funktionsytan. Vi kan tänka oss att vi skivar denna volym i tunna skivor ortogonala mot x-axeln med tjockleken dx. Arean på ett tvärsnitt vid x blir då $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \mathrm{d}y$. Volymen på en skiva vid x blir då tjockleken multiplicerat med tvärsnittsarean, alltså $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \mathrm{d}y$. För att få hela volymen av kroppen kan vi summera alla infinitesimala volymselement från $x = a$ till $x = b$. Denna summan beräknas med en integral

$$V = \int \mathrm{d}V = \int_a^b \mathrm{d}x \cdot \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \mathrm{d}y.$$

5 Variabelbyte för dubbelintegraler

Syftet med variabelsubstituation är att förenkla problem genom att låta dubbelintegralernas funktioner bero på nya variabler. Ett elementärt variabelbyte är polära koordinater, vilket är lämpigt vid runda basytor, där variablerna x och y för en dubbelintegral substitueras mot $0 \leq r$ och $0 \leq \theta < 2\pi$. Enligt:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta
\end{aligned}
$$

Det är dock bara specialfall, ett godtyckligt variabelbyte $(x, y) \to (u, v)$ är giltigt om de gamla variablerna beror bijektivt på de nya variablerna. Vid variabelbyten för dubbelintegral gäller följande.

Sats (Sats 6.4.6)**.** *Låt*

$$
\begin{aligned}
x &= g(u, v) \\
y &= h(u, v)
\end{aligned}
$$

vara en bijektiv C^1-avbildning av ett öppet begränsat, kvadrerbart område E i uv-planet på ett motsvarande område D i xy-planet sådant att:

$$
J(u, v) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \neq 0 \tag{1}
$$

i E. Då gäller för integrerbart $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ att

$$
\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_E f(g(u, v), h(u, v))|J(u, v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{2}
$$

5.1 Intuition för Ekvation 2

Vid tolking av integraler som riemannsummor får vi en uppdelning av området D och E i delbitar D_k respektive E_k. och variabelbytet:

$$
E_k \xrightarrow{\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}} D_k
$$

För varje infinitesimal delbit ($E_k \to D_k$) sker en areaförändring där arean skalas med en faktor $|J(u, v)|$. Denna avbildningsmatris (Jacobimatrisen) innehåller alla första ordningens partiella derivator och representerar den bästa linjärapproximationen till en differentierbar funktion f i en punkt (u, v). Med andra ord kan funktionen f ses som linjär på ett godtyckligt litet område kring en punkt (u, v). Determinanten motsvarar i sin tur för areaförändringen kring en godtycklig punkt (u, v) under transformationen.

6 Integraler med hjälp av nivåytor

Låt

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ där } g(x,y) \in C^1,$$
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ där } h(u) \in C^0,$$
$$D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ samt kvadrerbar och}$$

$$a \leq g(x,y) \leq b \quad \forall (x,y) \in D.$$

Sätt

$$A(u) = \text{Area}\{(x,y) \in D \mid g(x,y) \leq u\}.$$

Då gäller det att

$$\iint_D h(g(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b h(u)A'(u)\mathrm{d}u.$$

7 Generaliserade integraler

Det finns två typer av generaliserade integraler. Den första typen är funktioner där området som integreras är begränsat, men där integranden är obegränsad tex. $\iint_\Delta \frac{1}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ där $(0,0) \in \Delta$. Den andra typen är funktioner där området är obegränsat. Man vill kunna avgöra om en integral $\iint_\Delta f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ konvergerar till ett värde, och om det gör det, vad det värdet är. Likt integraler i en variabel kan samma tekniker som används för att lösa vanliga dubbelintegralsproblem, användas för att hantera generaliserade integraler.

8 Normalfördelningar

Det är känt att $N\big(0,1\big) \sim e^{-x^2}$. Av normalfördelningsfunktionens natur gäller det att den sammanlagda arean under grafen bör vara 1, det vill säga

$$\int_{-\infty}^{\infty} ce^{-x^2}\mathrm{d}x = 1 \implies c\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = 1,$$

där c är en konstant. Denna konstant bestäms av Gauss integralsats.

8.1 Gauss integralsats

Sats. *Konstanten c i likheten*

$$\int_{-\infty}^{\infty} ce^{-x^2}\,dx = 1 \iff c\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 1$$

har värdet $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Bevis. Det intressanta är egentligen att bestämma värdet av $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ eftersom c ges av

$$c = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x}.$$

Sätt $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$. Då gäller

$$I^2 = I \cdot I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y.$$

Valet av variabeln y i det sista ledet är ingen tillfällighet, ty för detta val ger Fubinis sats

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Variabelbytet från cartesiska[1] till polära koordinater, $\big(x,y\big) \to \big(r,\theta\big)$, ger

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2}\mathrm{d}r,$$

och genom variabelbytet $u = r^2$ ges slutligen

$$2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2}\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{2}e^{-u}\mathrm{d}u = \pi,$$

det vill säga

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\Big)^2 = \pi,$$

varur $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ erhålls.

□

9 Definitioner

Definition -1. [2] *Låt a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ med villkoren $a \leq b$ och $c \leq d$. Mängden*

$$\Delta = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\Big\}$$

kallas för en axelparallell rektangel. *Detta betecknas med notationen*

$$\Delta = \big[a,b\big] \times \big[c,d\big].$$

[1] Stavningsvarianten med k, ”kartesiska”, förekommer också.

[2] Numreringen av definitionerna börjar från och med -1 för att överensstämma med motsvarande definitionsnumrering i *Analys i flera variabler* av Arne Persson och Lars-Christer Böiers. Speciellt ska definition 1 i denna sammanfattning överensstämma med definition 1 i Persson/Böiers.

Definition 0. *Låt* $\Delta = \big[a,b\big] \times \big[c,d\big]$ *vara en axelparallell rektangel i* xy*-planet. En funktion*

$$\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$$

kallas för en trappstegsfunktion *om det finns partitioner*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

och

$$c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d$$

av $\big[a,b\big]$ *respektive* $\big[c,d\big]$ *sådana att* Φ *har ett konstant värde på varje delrektangel* $\big[x_{i-1}, x_i\big) \times \big[y_{j-1}, y_j\big)$, $i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m.$

Definition 1. *Låt* Δ *vara en axelparallell rektangel och* $f : \Delta \to \mathbb{R}$. f *sägs vara* integrerbar *över* Δ *om det* $\forall\epsilon > 0$ *finns trappstegsfunktioner* $\Psi : \Delta \to \mathbb{R}$ *och* $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$ *sådana att*

$$\Phi(x,y) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Delta,$$
$$\Psi(x,y) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Delta,$$
$$\iint\limits_{\Delta} \Psi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{\Delta} \Phi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \epsilon,$$

och fortsatt om f *är integrerbar över* Δ *så är*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sup_{\Phi \leq f} \iint\limits_{\Delta} \Phi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \inf_{\Psi \geq f} \iint\limits_{\Delta} \Psi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$