Sammanfattning av föreläsningar läsvecka 3
Flervariabelanalys

Gustav Mårdby, Anna Kuutti, Erik Magnusson, Nima Salmanpour, Ossian Eriksson

1 mars 2019

1 Definitioner

Vi inleder med definitioner av några centrala begrepp:

Definition 1. Låt a, b, c, d vara reella tal sådana att $a \leq b$, $c \leq d$. Mängden $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ kallas för en axelparallell rektangel. Mängden kan också skrivas med hjälp av den kartesiska produkten: $\Delta = [a, b] \times [c, d]$.

Definition 2. Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel i xy-planet. En funktion $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$ kallas trappstegsfunktion om det finns en partition $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d$ av $[a, b]$ respektive $[c, d]$ sådana att Φ har ett konstant värde på varje delrektangel $[x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$ för $i = 1, 2, ..., n \quad j = 1, 2, ..., m$.

Definition 3. Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel och $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$ vara en trappstegsfunktion med avseende på partitionen $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d$ av Δ. Då är

$$\iint_\Delta \Phi(x, y)\, dx\, dy \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \left(x_i - x_{i-1}\right) \left(y_j - y_{j-1}\right), \tag{1}$$

där c_{ij} är Φ:s konstanta värde på delrektangeln $[x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_i)$.

Definition 4. Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel och $f : \Delta \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion, f sägs vara integrerbar över Δ om $\forall \varepsilon > 0$ existerar trappfunktioner $\Phi, \Psi : \Delta \to \mathbb{R}$ så att

i) $\Phi(x, y) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta$

ii) $\Psi(x, y) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta$

iii) $\iint_\Delta \Psi(x, y)\, dx\, dy - \iint_\Delta \Phi(x, y)\, dx\, dy < \varepsilon$,

och om f är integrerbar över Δ så är

$$\iint_\Delta f(x, y)\, dx\, dy \overset{def}{=} \sup_{\substack{\Phi \text{ trappfun.} \\ \Phi \leq f}} \iint_\Delta \Phi(x, y)\, dx\, dy = \inf_{\substack{\Psi \text{ trappfun.} \\ \Psi \geq f}} \iint_\Delta \Psi(x, y)\, dx\, dy. \tag{2}$$

2 Fubinis sats

Fubinis sats på rektangulär yta: Låt $f(x,y)$ vara en C^0-funktion på en kompakt mängd Δ där $\Delta = \{f(x,y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Då är f integrerbar på hela denna mängd, d.v.s. $\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy$ existerar och

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy. \tag{3}$$

Bevisidén bygger på definitionerna 2 och 4 på sida 1. Där ser man på integralen som volymen under funktionen som är intryckt mellan två trappstegsfunktioner. Trappstegsfunktionernas integraler är definierade som summan av volymerna av rätblock. Integralen av f uppskattas alltså av summan av alla dessa rätblock. Eftersom mängden man integrerar över är en rektangel spelar det ingen roll i vilken ordning alla rätblockens volymer adderas.

Definition 5.

1. En mängd D sägs vara reguljär i x-led om D kan skrivas på formen $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ för några $a, b \in \mathbb{R}$ och några kontinuerliga funktioner α och β av x.
2. En mängd D sägs vara reguljär i y-led om D kan skrivas på formen $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha(y) \leq x \leq \beta(y),\ a \leq y \leq b\}$ för några $a, b \in \mathbb{R}$ och några kontinuerliga funktioner α och β av y.

Fubinis sats på reguljär mängd: Låt $f(x,y)$ vara en C^0 funktion på en reguljär mängd. Då kommer f vara integrerbar över hela denna mängd och integralen beräknas genom

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx, \tag{4}$$

där man skulle kunna byta integrationsordningen om x är en funktion av y istället.

Exempel 1: Definitionsmängden $\Delta = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq x+1\}$ är reguljär både i x- och y-led då kan man byta uttrycka x som funktion av y bara genom att inse $y = x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1$. Därefter beräknar man y:s största och minsta värde på Δ och använder dessa värden som y:s konstanta gränser.

Exempel 2: Beräkna $\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy$ där $\Delta = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$ och $f(x,y) = xy$. Eftersom integrationsordningen inte spelar någon roll räknas integreras f först med avseende på y. Detta på grund av att y:s nedre begränsning är 0. Därmed blir termerna i beräkningarna färre.

$$\int_1^3 \left(\int_0^2 xy\,dy \right) dx = \int_1^3 x \left(\int_0^2 y\,dy \right) dx, \tag{5}$$

ty x ses som en konstant med avsende på y, och konstanter kan flyttas ut ur intergraltecknet.

$$\int_1^3 2x\,dx = 2\left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right] = 8 \tag{6}$$

Notera att Δ är reguljär, men även en axelparalell rektangel. Om Δ istället hämtades ur exempel 1 ($\Delta = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq x+1\}$) skulle uppställningen av integralen bli

$$\int_a^b \left(\int_c^{x+1} f(x,y)\, dy \right) dx. \tag{7}$$

3 Variabelsubstitution

I vissa situationer är det lämpligt att av olika anledningar utföra ett variabelbyte i en dubbelintegral.

$$\iint_{\Delta_1} f(x,y)\, dx\, dy \to \iint_{\Delta_2} f(u,v)\, du\, dv \tag{8}$$

Frågan är alltså hur variabelbytet i ekvation (8) ska ske.

Sats 6. Om funktionen f är integrerbar i intervallen, och avbildningen

$$x = x(u,v)$$

$$y = x(u,v)$$

är bijektiv och $\in C^1$, samt att Δ_1 och dess uv-avbildning Δ_2 är öppna, begränsade och kvadrerbara områden, och att $J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ i Δ_2 gäller det att

$$\iint_{\Delta_1} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\Delta_2} f(x(u,v), y(u,v)) |(J(u,v))|\, du\, dv. \tag{9}$$

Detta verkar relativt ofarligt; det som sticker ut är multiplikationen med Jacobideterminanten $J(u,v)$:

$$dx\, dy \cdot |(J(u,v))| = du\, dv$$

Detta kan, enligt boken, tolkas som en förändringsfaktor för infinitesimalen $dA = dy\, dx$, när den avbildas till $du\, dv$.

Exempel 1: Beräkna

$$\iint_{\Delta} \frac{x}{x+2y}\, dy\, dx, \tag{10}$$

där Δ är det område som i xy-planet avgränsas av
$2x - y = 0, \;\; 2x - y = 2, \;\; x + 2y = 1, \;\; x + 2y = 2.$

Integrationsområdet är svårt att arbeta på; vi vill hellre integrera över rektangulära, axelparallella områden. Därför sätter vi:

$$u = 2x - y$$

$$v = x + 2y.$$

Nu har vi uttryckt u och v som funktioner av x och y, vilket är motsatsen till vad vi vill göra. Enkel omkastning av termer ger dock

$$x = \frac{2u + v}{5}$$
$$y = \frac{-u + 2v}{5}.$$

Detta variabelbyte kommer få Δ att bijektivt avbildas på området

$$\Delta_2 = \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\}$$

i uv-planet. Nu behöver Jacobideterminanten bestämmas:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{5}.$$

Enligt sats 6 ovan kommer alltså integralen (10) vara ekvivalent med

$$\iint_\Delta \frac{x}{x+2y}\,dy\,dx = \iint_{\Delta_2} \frac{\frac{2u+v}{5}}{v}|\frac{1}{5}|\,du\,dv = \frac{1}{25}\iint_{\Delta_2} \frac{2u}{v} + 1\,du\,dv.$$

Detta är en relativt lätt dubbelintegral som kan beräknas med Fubinis sats, vilket lämnas som övning åt läsaren.

3.1 Polära koordinater

Ett viktigt exempel på variabelsubstitution är *polära koordinater*. Polära koordinater innebär att man ansätter

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta).$$

Som tidigare nämnts måste man vid variabelsubstitution beräkna Jacobideterminanten. I detta fall blir Jacobideterminanten

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos(\theta)\cdot r\cos(\theta) - (-r\sin(\theta)\cdot\sin(\theta)) = r\sin^2(\theta) + r\cos^2(\theta) = r.$$

Vid substitution till polära koordinater ska man alltså multiplicera med $|r|$. Eftersom $r = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ gäller dock alltid att $|r| = r$.

Exempel 1: Beräkna dubbelintegralen $\iint_\Delta \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ då $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

Om man i detta exempel skulle försöka integrera med hjälp av kartesiska koordinater, så skulle man snabbt stöta på problem. Det är nämligen omöjligt att uttrycka

$$\int \mathrm{e}^{-x^2}\,dx \tag{11}$$

i termer av (ändligt många) elementära funktioner. Byter vi dock till polära koordinater får vi att $x^2 + y^2 = r^2$. Det nya området D att integrera över blir därmed $D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq 2\ ,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Den nya dubbelintegralen blir nu

$$\iint_\Delta \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \iint_D \mathrm{e}^{-r^2} r dr\, d\theta.$$

Använder man nu Fubinis sats får man

$$\iint_D \mathrm{e}^{-r^2} r dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 r\mathrm{e}^{-r^2} dr \right) d\theta = 2\pi \int_1^2 r\mathrm{e}^{-r^2} dr.$$

Den återstående enkeltintegralen kan enkelt lösas, t.ex. med titta på-metoden, eller ytterligare variabelsubstitution.

4 Integration m.h.a. nivåkurvor

Sats: Låt $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara C^1, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara C^0, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kvadrerbart och antag att $a \leq g(x,y) \leq b$ för alla $(x,y) \in D$. Sätt $A(u) = Area\{(x,y) \in D \mid g(x,y) \leq u\}$. Då gäller att:

$$\iint_\Delta h(g(x,y))\, dx\, dy = \int h(u) A'(u)\, du \tag{12}$$

Vanligen måste D i alla fall delvis begränsas av nivåkurvor.

Exempel 1: Beräkna integralen $\iint_\Delta \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy$ då $\Delta = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Vi använder satsen och sätter $h(u) = \sin(u)$ samt $y(x,y) = x^2 + y^2$. Vi ser då vi ritar en bild att $A(u) = \pi \cdot u - \pi$. Enligt satsen ovan gäller därmed

$$\iint_\Delta \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_1^4 \sin(u) \cdot A'(u)\, du = \int_1^4 \sin(u)\pi\, du = \pi(\cos(1) - \cos(4)) \tag{13}$$

5 Generaliserade integraler

Två fall

1. Vi integrerar över ett begränsat område D men integranden är obegränsad i D. Intuitivt kan man tänka sig att funktionen sticker iväg till $\pm\infty$ någonstans i området.
2. Området D är självt obegränsat.

Frågan som vi söker besvara är huruvida integralen konvergerar och då mot vilket värde, eller om den divergerar. Generellt kan sägas att vi använder samma tekniker och trick som i envariabelanalysen.

Exempel 1: Bestäm om integralen $\iint_\Delta \mathrm{e}^{-x-y}\, dx\, dy$ då $\Delta = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x\}$ konvergerar och bestäm i så fall dess värde.

Integralen är generaliserad ty området Δ är obegränsat. Vi börjar med att integrera integralen som vanligt.

$$\int_0^\infty dx \int_0^x \mathrm{e}^{-x-y} dy = ... = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} dx = \lim_{n\to\infty} -\mathrm{e}^{-n} + \frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2} + 1 - 1/2 = \frac{1}{2} \tag{14}$$