Sammanfattning LV3 Flervariabelanalys grupp 3C

Ekmark, Ida; Golic, Alexandru; Johansson, Niklas;
Reinecke, Sandra; Sjögren, Emelie; Weddig, Alfred.

2019–02–14

1 Implicita funktionssatsen, den allmännare formuleringen

Låt $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ vara en C^1-funktion, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ och låt punkten $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ vara en punkt på nivåhyperytan

$$F(\boldsymbol{x}) = C, \tag{1}$$

det vill säga att

$$F(\boldsymbol{a}) = C. \tag{2}$$

Om

$$\frac{\partial}{\partial x_k} F(\boldsymbol{a}) \neq 0, \tag{3}$$

för något $k = 1, 2, ..., n$, finns det en omgivning U till $\boldsymbol{a}$ sådan att restriktionen av nivåhyperytan $F(\boldsymbol{x}) = C$ till U definierar en C^1-funktion

$$x_k = f_k(x_1, x_2, ..., x_{k-2}, x_{k-1}, x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n). \tag{4}$$

För denna ekvation gäller det att

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_{x_k}}, \tag{5}$$

för varje $i = 1, 2, ..., k-2, k-1, k+1, k+2, ..., n$. Här är det viktigt att veta vilken av F's partialderivator som ska vara i täljaren och vilken som ska vara i nämnaren. Som en minnesregel kan vi tänka på att det i nämnaren kommer vara partialderivatan av den beroende variabeln, i detta fall k, vilken kan ses som belastad eller tung och som därför sjunker till botten medan det i täljaren kommer vara den oberoende variabeln, i detta fall i, vilken kan ses som fri eller lätt och som därför flyter till ytan.

2 Dubbelintegraler

Till att börja med ska vi ge en mer informell eller intuitiv definition av vad som menas med en dubbelintegral. Låt $f(x,y)$ vara en kontinuerlig funktion av två variabler och låt Δ vara ett begränsat område i xy-planet. Då lyder den informella definitionen

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \text{den tecknade volymen mellan grafen } z = f(x,y)$$
$$\text{och området } \Delta \text{ i } xy\text{-planet,}$$

där $f(x,y)$ kan ses som en tecknad höjd och $dx\,dy$ som en infinitesimal area.

2.1 Inspektion och symmetrier

För att förenkla ett dubbelintegralproblem kan inspektion av dubelintegralen vara viktig. Exempelvis gäller det att integration är en linjär operator, det vill säga att integralen av en linjärkombination av funktioner är detsamma som en linjärkombinationen av de integrerade funktionerna, vilket illustreras i

$$\iint_{\Delta} \alpha\cdot f(x,y)+\beta\cdot g(x,y)\,dx\,dy = \alpha\cdot\iint_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy+\beta\cdot\iint_{\Delta} g(x,y)\,dx\,dy. \quad (6)$$

Dessutom är symmetrier en viktig sak att kolla efter vid inspektion av dubbelintegraler, liksom det är för enkelintegralrpoblem. Principen för symmetrier är densamma för dubbel- som enkelintegraler men den illustreras enklast med envariabelsfuntioner. En jämn envariabelsfunktion kommer ha samma area på båda sidor om origo, se figur 1, medan en udda envariabelsfunktion kommer ha samma area men med olika tecken, se figur 2. Gällande funktioner av två variabler kommer skillnaden vara att det är volym istället för arean.

2.2 Fubinis sats

En teknik man kan använda för att beräkna dubbelintegraler är Fubinis sats. Den ser ut som följer.

2.2.1 Fubinis sats för axelparallella rektanglar

Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på rektangeln

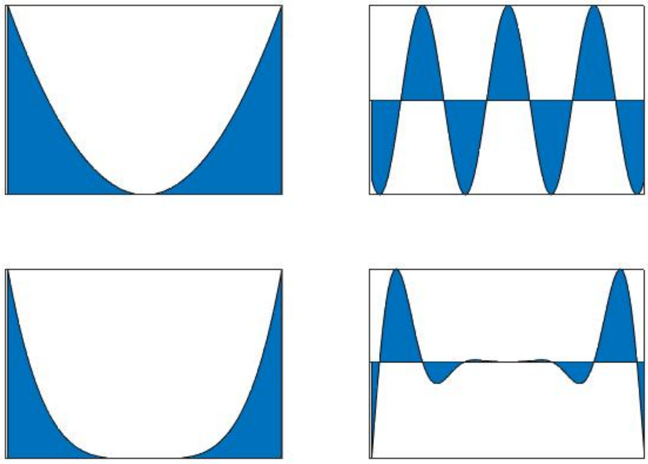
$$\Delta = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b, c\leq y\leq d\right\} \quad (7)$$

då existerar

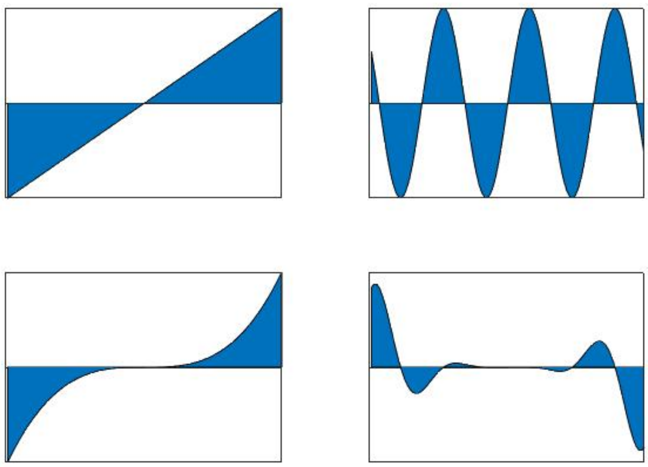
$$\iint_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy \quad (8)$$

och

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx. \quad (9)$$



Figur 1: Fyra exempel på jämna funktioner.



Figur 2: Fyra exempel på udda funktioner.

2.2.2 Fubinis sats för reguljära områden

Om $f(x, y)$ är kontinuerlig på ett område av formen

$$\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\right\} \tag{10}$$

där $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga för $x \in [a, b]$ och $\alpha(x) \leq \beta(x)$ för alla sådana x, så gäller att

$$\iint_{\Delta} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy. \tag{11}$$

2.3 Variabelbyten

En teknik för beräkning av dubbelintegraler är att genomföra ett variabelbyte. Det viktigaste exemplet är bytet till polära koordinater. Den nya infinitesimala areaenheten $dx\, dy$ är då lika med gamla infinitesmala arean $dr\, d\theta$ multiplicerat med funktionaldeterminanten på följande vis:

$$dx\, dy = \left\| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right\| dr\, d\theta. \tag{12}$$

Detta följer från kedjeregeln och teori från linjär algebra. Följande sats beskriver hur allmänna variabelbyten kan göras. Låt

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases} \tag{13}$$

vara en bijektiv C^1-avbildning av ett öppet, begränsat, kvadrerbart område E i uv-planet på ett motsvarande område D i xy-planet, sådan att $J(u, v) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \neq 0$ i E. Då gäller för en godtycklig integrerbar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ att:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v))|J(u, v)|\, du\, dv. \tag{14}$$

2.4 Integration längs nivåkurvor

Vid dubbelintegration kan det för sammansatta funktioner med speciella utseenden ibland vara lämpligt att omvandla dubbelintegralen till en enkelintegral, och istället för att integrera två gånger längs axlarna integrera en gång längs den inre funktionens nivåkurvor, genom att tillämpa satsen om integration längs nivåkurvor. Den lyder på följande vis:

Låt $g(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en C^1-funktion, $h(u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en C^0-funktion, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kvadrerbar mängd samt antag att $\exists\, a, b \in \mathbb{R} | a \leq g(x, y) \leq b$, för alla $(x, y) \in D$. Definiera nu en ny funktion $A(u) = Arean\{(x, y) \in D | g(x, y) \leq u\}$. Då gäller att:

$$\iint_D h(g(x, y))\, dx\, dy = \int_a^b h(u) A'(u)\, du. \tag{15}$$

2.5 Generaliserade dubbelintegraler och Gauss sats

Precis som för enkelintegraler kan man i vissa fall utöka definitionen för att täcka integraler på formen

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy, \tag{16}$$

där antingen D inte är ett begränsat område, eller där $f(x,y)$ inte är begränsad på D. Dessa löses på liknande sätt som enkelintegraler, och samma tekniker som används för att lösa vanliga dubbelintegraler (till exempel Fubinis sats). Ett exempel på användningar av generaliserade dubbelintegraler är Gauss sats, som säger att:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{17}$$

Denna integral är tämligen krånglig att lösa i det endimensionella fallet, ty funktionen $f(x) = e^{-x^2}$ inte har en elementär antiderivata. Däremot kan man mycket enklare bevisa detta med hjälp av generaliserade dubbelintegraler genom att först sätta

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \tag{18}$$

och sedan betrakta följande ekvation i polära respektive Cartesiska koordinater:

$$\pi = \iint_{\mathbb{R}^2} re^{-r^2}dr\,d\theta = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy = (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx)(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy) = I{*}I. \tag{19}$$

Detta ger alltså att

$$\pi = I^2 \implies I = \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx. \tag{20}$$

2.6 Formella definitioner

Den tidigare nämnda, informella definitionen av en dubbelintegral kan ge en intuitiv uppfattning och belyser ett av dubbelintegralens främsta och vanligaste användningsområden, beräkning av volymer. Men för äkta förståelse krävs en mer matematiskt rigorös definition.

Precis som med integraler av en variabel utgår den formella definitionen av dubbelintegraler från Riemannsummor av trappstegsfunktioner. Men vad innebär detta egentligen i mer än en variabel? Nedan definieras några viktiga begrepp som krävs för att formulera denna definition.

2.6.1 Axelparallell rektangel

Låt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ där $a \leq b$ och $c \leq d$. En axelparallell rektangel definieras som mängden Δ av alla punkter (x, y) i $\mathbb{R}^2$ med x-värden mellan a och b samt y-värden mellan c och d, dvs

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}. \tag{21}$$

Axelparallella rektanglar kan skrivas med följande notation:

$$\Delta = [a, b] \times [c, d]. \tag{22}$$

Dessa mängder kan alltså skrivas som intervallet i x-led multiplicerat med intervallet i y-led. Således är sidorna av dessa rektanglar parallella med koordinataxlarna, därav namnet.

2.6.2 Trappstegsfunktion i $\mathbb{R}^2$

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel i xy-planet. En funktion $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$ kallas för en trappstegsfunktion om det finns partitioner av $[a, b]$ respektive $[c, d]$

$$\begin{aligned} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d \end{aligned} \tag{23}$$

sådana att Φ har ett konstant värde på varje delrektangel $[x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$. Notera att den övre randen av intervallen utelämnas ur delrektanglarna, men i praktiken har detta inte någon betydelse för vårt ändamål.

2.6.3 Dubbelintegral av en trappstegsfunktion

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel och låt $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$ vara en trappstegsfunktion med avseende på partitionerna

$$\begin{aligned} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d. \end{aligned}$$

Då definieras dubbelintegralen av Φ över området Δ som

$$\iint_\Delta \Phi(x, y)\, dxdy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \tag{24}$$

där C_{ij} är det konstanta värdet på Φ i varje delrektangel $[x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$. Denna summand kan tolkas geometriskt som volymen av ett rätblock med delrektangeln som bas och värdet av Φ som tecknad höjd. Under detta synsätt är dubbelintegralen således summan av alla dessa rätblocks volymer, där en delvolym tolkas som negativ om dess tillhörande värde på Φ är negativt, dvs om rätblocket är under xy-planet.

2.6.4 Integrerbarhet av funktion över axelparallell rektangel

Givet en axelparallell rektangel $\Delta = [a, b] \times [c, d]$, sägs funktionen $f : \Delta \to \mathbb{R}$ vara integrerbar över Δ om $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ trappstegsfunktioner $\phi, \psi : \Delta \to \mathbb{R}$ sådana att

$$\begin{cases} \phi(x, y) \le f(x, y) & \forall (x, y) \in \Delta \\ \psi(x, y) \ge f(x, y) & \forall (x, y) \in \Delta \\ \iint_\Delta \psi(x, y)dxdy - \iint_\Delta \phi(x, y)dxdy < \varepsilon. \end{cases}$$

Om f är integrerbar över Δ så definieras dubbelintegralen av f som

$$\iint_\Delta f(x, y)dxdy = \sup_{\substack{\phi trappfkt \\ \phi \le f}} \iint_\Delta \phi(x, y)dxdy = \inf_{\substack{\psi trappfkt \\ \psi \ge f}} \iint_\Delta \psi(x, y)dxdy.$$