MVE035 v.3

Andreas Führ, Kerstin Vahlin, Oskar More Arvidsson,
Samuel Wagner, Sixten Elehed, Sofia Ljungdahl *

February 2019

1 Föreläsning mån 4/2

Under föreläsningen togs det upp ett bevis för kedjeregeln för vektorvärda funktioner samt en mer allmän formulering av implicita funktionssatsen. Definition (informell) av dubbelintegral och olika tekniker för att lösa dessa tas istället upp under nästa föreläsning.

1.1 Bevis av kedjeregeln för vektorvärda funktioner

$\mathbb{F}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{G}$: $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ båda $\in C^1$
$(\mathbb{F} \circ \mathbb{G})'(\mathbb{a}) = \mathbb{F}'(\mathbb{G}(\mathbb{a})) \cdot \mathbb{G}'(\mathbb{a})$
Bevis Båda leden är $m \times p$ matriser.
VL: $\mathbb{F} \circ \mathbb{G}$: $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$
Betrakta det (i,j):te elementet i matrisen. Det är per definition $\frac{\partial}{\partial t_j}\left[F_i(\mathbb{G}(\mathbb{t}))\right]$, $\mathbb{t} = (t_1, ..., t_p)$.
HL: I allmänhet för matrismultiplication gäller $(AB)_{ij} = \sum A_{ik}B_{kj}$. I vårt fall $\Rightarrow$ (i,j):te elementet i HL är
$\sum_{k=1}^{n}(\mathbb{F}'(\mathbb{G}(\mathbb{t})))_{ik}(\mathbb{G}'(\mathbb{t}))_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}F_i(\mathbb{G}(\mathbb{t}))\frac{\partial G_k}{\partial t_j}, \mathbb{F} = \mathbb{F}(\mathbb{x}), \mathbb{x} = (x_1, ..., x_n)$.
Så VL=HL $\Leftrightarrow \forall i, j$:
$\frac{\partial}{\partial t_j}\left[F_i(\mathbb{G}(\mathbb{t}))\right] = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}F_i(\mathbb{G}(\mathbb{t}))\frac{\partial G_k}{\partial t_j}$. (Detta är kedjeregeln steg 3 från läsvecka 1.)

1.2 Allmännare formulering av Implicita funktionssatsen

Låt $F(x_1, ..., x_n)$ vara en C^1-funktion av n stycken variabler och $\mathbb{a} = (a_1, ..., a_n)$ en punkt på nivåhyperytan $F(\mathbb{x}) = C$ (dvs $F(\mathbb{a}) = C$). Om $\frac{\partial}{\partial x_k}F(a_1, ..., a_n) \neq 0$ då finns det en omgivning U av $(a_1, ..., a_n)$ så att restriktionen av nivåhyperytan

*Institutionen för Teknisk Fysik
Chalmers tekniska högskola
SE412 96 Göteborg, Sverige
Email: ljsofia@student.chalmers.se, vahlin@student.chalmers.se, oskarar@student.chalmers.se, elehed@student.chalmers.se, swagner@student.chalmers.se

till U implicit definierar en C^1-funktion $x_k = f_k(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n)$ och $\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \frac{-F_i}{F_k}$.

2 Tekniker för dubbelintegraler tis 5/2

Under förra föreläsningen gick vi igenom den informella definitionen av integration i en variabel - den tecknade arean, mellan grafen, $y = f(x)$ och x-axeln. Vid integration av en funktion $f(x, y)$ av två variabler, över ett område Δ i xy-planet kan man informellt definiera det som den tecknade volymen mellan grafen $z = f(x, y)$ och området Δ i xy-planet. Detta gäller under förutsättningen att funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig och där Δ är ett begränsat område i xy-planet.

Föreläsningen avslutades med att nämna fyra tekniker för hur man beräknar dubbelintegraler - Inspektion och symmetri, Fubinis sats (för rektanglar och för reguljära områden), variabelbyten (polära koordinater) och nivåkurvor. Tre av dessa förklarades sedan på följande föreläsning.

2.1 Inspektion och symmetri

Föreläsningen började med en observation för att kunna använda tekniken att inspektera och hitta symmetrier. Integration är en linjär operation, det vill säga avbildningen $f \mapsto \iint_\Delta f(x, y)dxdy$ är en linjär avbildning från $C^0(\Delta)$ till $\mathbb{R}$. Alltså är

$$\iint_\Delta (\alpha f + \beta g)dxdy = \alpha \iint_\Delta f dxdy + \beta \iint_\Delta g dxdy \tag{1}$$

för alla α och β som hör till $\mathbb{R}$ och för alla f och g som hör till $C^0(\Delta)$. Metoden användes sedan för att lösa ett exempel då $\iint_\Delta (x + 3)dA$ skulle bestämmas. $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$. Arean, Δ, är i det här fallet övre halvan av en cirkelskiva. $\iint_\Delta xdA + 3\iint_\Delta 1dA = 0(\text{symmetri}) + \iint_\Delta 3dA = 3 \cdot Area(\Delta) = \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 6\pi$.

2.2 Fubinis Sats

Fubinis sats är en av de viktigaste teknikerna vid integration av dubbelintegraler. Fubinis delas upp i två steg; ett för axelparallella rektanglar och ett för reguljära områden. Där de reguljära området är det mer allmänna fallet av de axelparallella rektanglarna.

2.2.1 Fubinis Sats för rektanglar (del av sats 6.1.3)

Om $f(x, y)$ är kontinuerlig på rektangeln $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ då existerar $\iint_\Delta f(x, y)dxdy$ och $\iint_\Delta f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx$.
När man använder Fubinis sats ersätter man en dubbelintegral med två enkelintegraler, vilket är enklare att beräknad då man exempelvis kan använda kalkylens fundamentalsats, vilken inte har någon direkt motsvarighet i flervariablea-

nalys. Man beräknar alltså först integralen av den ena variabeln och därefter den andra. Det spelar ingen roll för resultatet vilken variabel som beräknas först, men det kan vara en enklare beräkning att ta det i en viss ordning.

Rent intuitivt kan man förklara Fubinis sats som en infinitesimal tecknad höjd multiplicerat med en tecknad area, vilket blir en infinitesimal tecknad volym. I följande formulering ses då delen dx som den infinitesimala tecknade höjden och $\int_c^d f(x,y)dy$ som den tecknade arean. $\iint \Delta f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy7$

Exempel (6.2, från övningsboken): $\iint_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+y)^2}$ där Δ är rektangeln med hörn i $(0,0),(1,0),(1,2),(0,2)$.

Lösning:

$$\iint_\Delta \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy = \int_0^1 dx \int_0^2 \frac{1}{(1+x+y)^2}dy = \int_0^1 dx \left[\frac{-1}{(1+x+y)^2}\right]_0^2 =$$

$$\int_0^1 dx(\frac{-1}{3+x} + \frac{1}{1+x}) = [\ln(1+x) - \ln(3+x)]_0^1 = \ln 2 - \ln 4 - (\ln 1 - \ln 3) = \ln\frac{3}{2}.$$

2.2.2 Fubinis Sats för reguljära områden (del av sats 6.2.4)

Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på ett område av formen $\Delta = \{(x,y)|a \le x \le b, \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$, där $\alpha(x)$, $\beta(x)$ är kontinuerliga funktioner för $x \in [a,b]$ och $\alpha(x) \le \beta(x)$, för alla sådana x, då gäller att $\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$. I denna formulering av satsen sägs Δ vara reguljärt i x-led. Områdena kan vara reguljära i både x- och y-led. Detta innebär att man får två formuleringar av Fubinis sats.

Exempel (6.12, från övningsboken): $\iint_D \frac{x}{1+y^2}dxdy$ där $D = \{(x,y)|x^2 \le y \le 1, x \ge 0\}$.

D kan skissas som området mellan en andragradskurva, $y = x^2$, $y = 1$ och y-axeln. D är reguljärt i x-led $\Rightarrow$

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{x}{1+y^2}dy = \int_0^1 xdx \int_{x^2}^1 \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^1 xdx\,[\arctan y]_{x^2}^1 =$$

$$\int_0^1 xdx(\frac{\pi}{4} - \arctan x^2) = \frac{\pi}{4}\int_0^1 xdx - \int_0^1 x\arctan x^2 dx = \frac{\pi}{8} - \int_0^1 x\arctan x^2 dx$$

Substituera $u = x^2$

$$\frac{\pi}{8} - \int_0^1 \frac{1}{2}\arctan u du = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan u du = [Partiell \quad integration] =$$

$$\frac{\pi}{8} - \left[\frac{1}{2}(u\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2))\right]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2) = \frac{1}{4}\ln 2$$

Alternativt kan D också betraktas som ett reguljärt område i y-led och skrivs då; $D = \{(x, y)|0 \leq y \leq 1, 0 \leq x\sqrt{y}\}$. $\Rightarrow$

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \frac{x}{1+y^2} dx = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \int_0^{\sqrt{y}} x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y}{1+y^2} dy \tag{2}$$

Substituera $u = 1 + y^2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{du}{u} = \left[\frac{1}{4} \ln u\right]_1^2 = \frac{1}{4} \ln u \tag{3}$$

Notera att det beräkningen blir enklare om man betraktar D som ett reguljärt område i y-led.

2.3 Koordinatbyten

Sista delen av föreläsningen innehöll tekniken för att lösa dubbelintegraler med hjälp av koordinatbyten. Det viktigaste exemplet är bytet till polära koordinater. En bra regel att förhålla sig till är att göra ett koordinatbyte till polära koordinater om området D är runt. För att kunna lösa det exempel som togs upp behövs en del av Sats 6.4.6 vilken formuleras:

$$dxdy = \left\| \tfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right\| drd\theta \tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r. \tag{5}$$

Uppgiften, 6.22 i boken, löd: bestäm $\iint_D x^2 e^{x^2+y^2} dxdy$ där $D = \{(x, y)|x^2+y^2 \leq 25, y \geq |x|\}$. Då D är ett runt område, är ett byte till polära koordinater ett bra tillvägagångssätt. Då blir $D = \{(r, \theta)|0 \leq r \leq 5, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\}$. Vilket medför $\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^5 (r\cos(\theta))^2 e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^5 r^3 e^{r^2} dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2(\theta) d\theta$, där man i första dubbelintegralen noterar att gränserna för dr hamnar på integralen till höger och gränserna för $d\theta$ till den första integralen. Då $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \Rightarrow$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2\theta d\theta = \left[\frac{1}{2}(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{2}(\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ och $\int_0^5 r^3 e^{r^2} dr =$ $\left[u = r^2, du = 2rdr\right] = \frac{1}{2}\int_0^{25} ue^u du = \frac{1}{2}\left[(u-1)e^u\right]_0^{25} = \frac{1}{2}(24e^{25} + 1)$. Dessa två integraler blir tillsammans $\Rightarrow$ Svar: $\frac{1}{8}(\pi - 2)(24e^{25} + 1)$. På så sätt kan man lösa en dubbelintegral med koordinatbyten, med hjälp av sats 6.4.6 och sedan Fubinis sats. Detta avslutade veckans andra föreläsning.

3 Föreläsning 7 februari, förmiddag

3.1 Motivering av koordinatbyten i dubbelintegraler

Dagen inleddes med att motivera (4) och (5) med hjälp av kedjeregeln och linjär algebra.

I koordinatbytet från cartesiska till polära koordinater låter vi x och y vara två funktioner beroende på r och θ sådant att $x = x(r, \theta)$ $y = y(r, \theta)$. Med hjälp av kedjeregeln får vi att en infinitesimal förändring dx, resulterar i det som kan ses i (6). På samma sätt kan vi se resultatet för en infinitesimal förändring dy i (7).

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \tag{6}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta \tag{7}$$

Vi kan lägga ihop (6) och (7) och forma den matrismultiplikation som ses i (8).

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix} \tag{8}$$

Vi kan i högerledet av (8) se att vi har Jacobimatrisen, vars determinant vi definierade i (5). I detta skede tar vi hjälp av linjär algebra. Vi låter T vara en linjär transformation sådant att $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. A priori vet vi att att det existerar en avbildningsmatris A sådant att $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$. Avbildningsmatrisen A beskriver vi enligt (9).

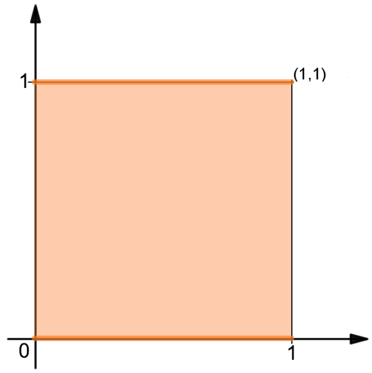
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{9}$$

Vi låter $\boldsymbol{e_x}$ och $\boldsymbol{e_y}$ stänga inne en area D som är 1×1 längdenheter, markerat i orange färg i figur 1. Vi transformerar sedan basvektorerna $\boldsymbol{e_x}$ och $\boldsymbol{e_y}$ så som i (10) och (11) och erhåller då två nya basvektorer $\boldsymbol{e_x^{'}}$ och $\boldsymbol{e_y^{'}}$.

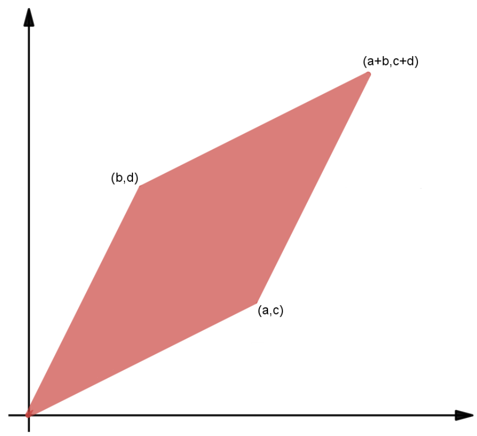
$$A\boldsymbol{e_x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \boldsymbol{e_x^{'}} \tag{10}$$

$$A\boldsymbol{e_y} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \boldsymbol{e_y^{'}} \tag{11}$$

Efter transformationen låter vi våra nya basvektorer $\boldsymbol{e_x^{'}}$ och $\boldsymbol{e_y^{'}}$ stänga inne en area $T(D)$ på liknande sätt som i figur 2, i detta fall markerat med röd färg. Vi vet från linjär algebra att detta medför att det för ett godtyckligt begränsat område D gäller att $Area(T(D)) = |det(A)|Area(D)$. Då detta tillämpas på (8) får vi (4).

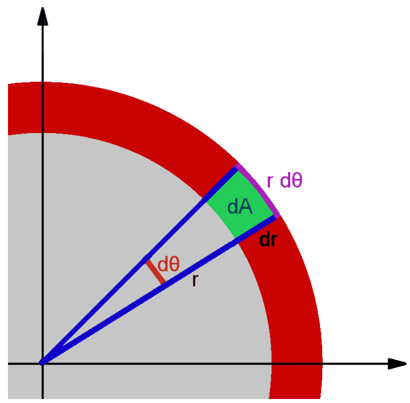


Figur 1: Area D



Figur 2: Area $T(D)$

Slutligen har vi även en geometrisk förklaring till detta som kan ses i figur 3. Här ser vi att en infinitesimal ökning dr av radien, samt $d\theta$ av vinkeln resulterar i en infinitesimal ökning i area, dA. Vi ser att denna relation kan beskrivas $dA = (rd\theta)dr = rdrd\theta$. I cartesiska koordinater beskrivs en ökning dA enligt basen gånger höjden, dvs $dA = dxdy$, vilket då resulterar i $dxdy = rdrd\theta$.



Figur 3: Area dA

3.2 Variabelbyte i dubbelintegraler (Sats 6.4.6)

Låt

$$\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$$

vara en bijektiv $\mathcal{C}^1$-avbildning av ett öppet begränsat kvadrerbart område E i uv-planet på ett motsvarande område D i xy-planet s.a.

$$J(u,v) := \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \neq 0 \quad \text{i } E.$$

För en godtycklig integrerbar funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gäller då att

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f\big(g(u,v),\, h(u,v)\big)\big|J(u,v)\big|\,dudv.$$

Observera att avbildningen

$$E \xrightarrow{\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}} D$$

har skalningsfaktorn (areaförändring) i form av funktionaldeterminanten $\big|J(u,v)\big|$.

3.3 Sats om integration med hjälp av nivåkurvor (ekv. (29), s. 271)

Låt $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en $\mathcal{C}^1$-funktion, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\mathcal{C}^0$-funktion av *en* variabel, låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara ett kvadrerbart område i xy-planet
Antag $a \leq g(x,y) \leq b\ \forall\,(x,y) \in D$.

Sätt

$$A(u) = \text{Area}\Big(\big\{(x,y) \in D \,\big|\, g(x,y) \le u\big\}\Big).$$

Då gäller

$$\iint_D h\big(g(x,y)\big)\, dxdy = \int_a^b h(u)A'(u)\, du.$$

Observera att mängden i areafunktionen är $= D$ för $u = b$ och tom för $u < a$. Villkoret $a \le g(x,y) \le b$ innebär att basområdet ligger mellan två nivåkurvor. Satsen innebär att dubbelintegraler av den speciella formen

$$I = \iint_D h\big(g(x,y)\big)\, dxdy,$$

där $h\big(g(x,y)\big)$ är konstant längs en nivåkurva till g, kan förenklas till en enkelintegral. För att beräkna volymen är det naturligt att skiva området längs g:s nivåkurvor. Att tillämpa satsen praktiskt kräver i allmänhet att areafunktionen $A(u)$ kan beräknas på ett smidigt sätt.

3.4 Generaliserade dubbelintegraler

I envariabelanalys hanteras generaliserade integraler genom att studera gränsvärden av vanliga Rieamannintegraler, som exempelvis

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{X\to\infty} \int_a^X f(x)\, dx.$$

För funktioner av två variabler finns inget självklart sätt att skära av en obegränsad integrand eller ett obegränsat område, för att sedan göra en gränsövergång. Generaliserade dubbelintegraler kan kategoriseras enligt följande:

- D är ett begränsat område, $f(x,y)$ är obegränsat i D
- D är ett obegränsat område

Grundfrågor för dessa integraler är om $\exists \iint_D f(x,y)\, dxdy$ (dvs. undersökning av konvergens) och vad dess värde i så fall är.

Exempel med en obegränsad mängd:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\alpha} \overset{\text{koordinatbyte}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{r\, dr}{(1+r^2)^\alpha} =$$
$$2\pi \int_0^\infty \frac{r\, dr}{(1+r^2)^\alpha} = \big\{\text{Substituera } u = 1+r^2\big\} = \pi \int_1^\infty u^{-\alpha}\, du \overset{\text{omm } \alpha>1}{=} \frac{\pi}{\alpha-1}$$

Alltså konvergerar integralen $\forall\, \alpha > 1$ med värdet $\frac{\pi}{\alpha-1}$.

4 Föreläsning 7 februari, eftermiddag

4.1 Gauss sats

Under föreläsningen formulerade vi och bevisade Gauss sats. Satsen lyder som följande,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{12}$$

För att bevisa denna sats sätter vi,
$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \Rightarrow I^2 = I \cdot I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, drd\theta = 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr$. Sätt $u = r^2$ vilket ger $2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-u} du = \pi$ det vill säga $I^2 = \pi$, $I = \sqrt{\pi}$, v.s.v

4.2 Def -1

Låt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ med $a \leq b$ och $c \leq d$. Mängden $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ kallas för en **axelparallell rektangel**, och kan även skrivas $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vilket är det skrivsätt som kommer användas fortsättningen.

4.3 Def 0

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel i xy-planet. En funktion $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$ kallas för en **trappstegsfunktion** om det finns partitioner $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ och $c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d$ av $[a, b]$ respektive $[c, d]$ sådana att Φ har ett konstant värde på varje delrektangel $[x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$, $i = 1, ..., n$ och $j = 1, ..., m$.

4.4 Def 1

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel och låt $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$ vara en trappstegsfunktion med avseende på partitioner $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ och $c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d$.

Då är $\iint_\Delta f(x, y)\, dxdy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ där C_{ij} är det konstanta värde som Φ har på delrektangeln $[x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$.

4.5 Def 2

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel och låt $f : \Delta \to \mathbb{R}$ vara en funktion. f sägs vara integrerbar över Δ om det för varje $\epsilon > 0$ finns trappstegsfunktioner $\Phi, \Psi : \Delta \to \mathbb{R}$ så att

- *(i)* $\Phi(x, y) \leq f(x, y)\ \forall\ (x, y) \in \Delta$
- *(ii)* $\Psi(x, y) \geq f(x, y)\ \forall\ (x, y) \in \Delta$
- *(iii)* $\iint_\Delta \Psi(x, y)\, dxdy - \iint_\Delta \Phi(x, y)\, dxdy < \epsilon$

Om f är integrerbar över Δ så är
$\iint_\Delta f(x,y)\,dxdy = \sup\limits_{\Phi \le f} \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dxdy = \inf\limits_{\Psi \ge f} \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dxdy$

4.6 Sats 6.1.3

Sats 6.1.3 säger att om en funktion $f(x,y)$ är kontinuerlig på en axelparallel rektangel så är den också integrerbar och de två itererande enkelintegralerna tillhörande funktionen existerar. En funktions deriverbarhet och enkelintegralernas existens är vitalt för att kunna använda tidigare nämnda Sats 6.1.2, också kallad Fubinis sats över rektanglar.

Denna sats säger att om $f(x,y)$ är integrerbar över rektangeln $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b, c \le y \le d\}$ så existerar $\iint_\Delta f(x,y)dxdy$ och $\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$.

4.6.1 Integrerbarhet

En viktig grund för beviset är anmärkningen att då Δ är en kompakt mängd, så innebär det att funktionen kan sägas vara likformigt kontinuerlig. En egenskap som kan beskrivas

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \delta \implies |f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})| < \epsilon \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \Delta. \tag{13}$$

I detta specialfall väljs det godtyckliga lilla talet ϵ i definitionen till $\frac{\epsilon}{Area(\Delta)}$ för att beviset ska kunna avslutas snyggt.

Beviset för att funktionen $f(x,y)$ är integrerbar görs genom att konstruera två trappstegsfunktioner $\Phi(x,y)$ och $\Psi(x,y)$. Dessa kan konstrueras så att de uppfyller alla tre villkor enligt definition 2, det vill säga att de är mindre respektive större än $f(x,y)$ och att skillnaden dem emellan kan bli infinitesimal om partitionerna görs tillräckligt små.

Att $f(x,y)$ är likformigt kontinuerlig medför enligt definitionen att funktionsvärdet inte varierar mer än $\frac{\epsilon}{Area(\Delta)}$ om partitionerna (det vill säga små områden mellan x_i och x_{i-1} samt y_j och y_{j-1}) är tillräckligt små. I dessa partitionerna kan det ansättas att $\Phi(x,y)$ och $\Psi(x,y)$ har det minsta ($c_{i,j}$) respektive största ($C_{i,j}$) värdet av $f(x,y)$ eftersom de är trappfunktioner och har konstant värde i alla partitionerna. På detta sätt har det visats att $\Phi(x,y)$ och $\Psi(x,y)$ är mindre respektive större än $f(x,y)$, samt att skillnaden $C_{i,j} - c_{i,j} < \epsilon$.

För att ha bevisat att $f(x,y)$ är integrerbar återstår bara att bevisa att skillnaden mellan de två integralerna för $\Phi(x,y)$ och $\Psi(x,y)$ är mindre än $\frac{\epsilon}{Area(\Delta)}$. Detta kan göras enligt följande:

$$\iint_\Delta \Psi(x,y)dxdy - \iint_\Delta \Phi(x,y)dxdy = \sum_{i,j}(C_{i,j} - c_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) <$$

$$< \frac{\epsilon}{Area(\Delta)} \sum_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) = \frac{\epsilon}{Area(\Delta)} Area(\Delta) = \epsilon \quad \square$$

4.6.2 Existens av enkelintegraler

För att visa på existensen av de itererande enkelintegralerna till $f(x, y)$ används en välkänd sats från envariabelanalysen. Denna säger att om en funktion är kontinuerlig så är den Riemannintegrerbar. Detta kan användas i två steg, fortfarande med avseende på definitionsmängden $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Det första steget är omskrivningen

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^b dx A(x). \tag{14}$$

Integralen i sista ledet är bara av en variabel, och existerar om $A(x)$ är kontinuerlig. Och integralen som är $A(x)$ existerar i sin tur om $f(x, y)$ är kontinuerlig med avseende på variabeln x. Detta följer direkt från att $f(x, y)$ är kontinuerlig i en variabel.

Eftersom $f(x, y)$ är likformigt kontinuerlig kan det uttryckas enligt definitionen ovan, med som det godtyckliga lilla talet $\frac{\epsilon}{c+d}$. Med $\boldsymbol{x_1} = (x_1, y)$ och $\boldsymbol{x_2} = (x_2, y)$, där x_1 och x_2 är tillräckligt nära varandra enligt definitionen för likformig konvergens, följer att

$$|A(x_1) - A(x_2)| = |\int_c^d f(x_1, y) dy - \int_c^d f(x_2, y) dy| \leq$$
$$\leq \int_c^d |f(x_1, y) - f(x_2, y)| dy < \int_c^d \frac{\epsilon}{d-c} dy = \epsilon \quad \square.$$