Sammanfattning Flervariabelanalys LV3

Pantzare, Axel   Westberg, Filip   Zeidan, Zeidan
Bekassy, Viktor   Brundin, Isak   Johansson, Adam

2019-03-02

1 Implicit givna funktioner

Att utrycka y som en funktion av x är inte alltid möjligt. Till exempel enhets-cirkeln, $x^2 + y^2 = 1$, går inte att uttrycka som en funktion $y(x)$ över hela intervallet. Om man däremot begränsar sig till ett visst intervall så kan det gå. Det är användbart för då kan man derivera funktionen och få fram lutningen på en tangentlinje. I fallet med två variabler kan man genom implicit derivering med avseenede på x uttrycka sambandet som en funktion av x. Allmänt gäller att om $f(x,y) = C$ så ger implicit derivering med avseende på x följande: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial x}$ vilket ger $f_x + f_y * \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(C) = 0$. Alltså $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y}$, vilket gäller då $f_y \neq 0$. Vi noterar att gradienten av f är (f_x,f_y), så kravet $f_y \neq 0$ betyder att gradienten ej är horisontell, vilket i sin tur betyder att tangenten ej är vertikal. Om $f_y = 0$ men $f_x \neq 0$ så går sambandet att beskriva som en funktion $g(y) = y$. Resonemanget är detsamma i högre dimensioner, låt $f = (x,y,z(x,y))$, då kommer liknande räkningar ge resultaten $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_x}$ och $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z}$, med villkoret att $f_z \neq 0$.

Den implicita funktionssatsen beskriver när en funktion kan beskrivas med hjälp av en implicit derivata.

Implicita funktionssatsen . *Låt $f(x_1,...,x_n)$ vara en differentierbar funktion av n variabler, låt $C \in \boldsymbol{R}$ och $\vec{a} = (a_1,...,a_n)$ vara en punkt på nivåytan $f(x_1,...,x_n) = C$. Då gäller att x_i , där $i \in n$, är en entydigt definierad som en differentierbar funktion av x_j där $j \neq i$, och $j = 1,...,n$ i en omgivning av $\vec{a}$ om och endast om $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) \neq 0$ och i så fall $\frac{\partial x_i}{\partial x_n} = -\frac{f_{xn}}{f_{xi}}(\vec{a}), n = 1,...,i-1$*

Vad satsen säger är att om någon av de partiella derivatorna är nollskillda så finns det ett öppet intervall inom vilket funktionen kan implicit beskrivas som en funktion i en term, beroende av de resterande, till exempel $y = y(x)$

eller $z = z(x,y)$. Då kan man räkna ut tangent-linjen, -planet eller planet i högre dimensioner i en given punkt med hjälp av implicit derivata.

2 Inledning dubbelintegraler

I envariabelanalys definieras $\int_a^b f(x)dx$ som den tecknade arean mellan kurvan och x-axeln. Officiellt definieras $\int_a^b f(x)dx$ som gränsvärdet av Riemannsummorna $\lim_{n\to\inf} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$

På liknande sätt kan man definiera $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ som den tecknade volymen mellan ytan $z = f(x,y)$ och xy planet. Man bör komma ihåg att $dxdy$ är en infinitdecimal area och $f(x,y)$ är den tecknade höjden, samt att D är bottenytan.

För att beräkna integraler kan man använda följande fyra viktiga metoder:

- Inspektion, om integralen är symmetrisk går det att utnyttja symmetrierna för att minska räknandet samt om integralen är udda respektive jämn kan även vissa slutsatser dras direkt. Som om en funktionsyta är symmetrisk i xy-planet är den noll

- En dubbelintegral kan beräknas som två envariabelsintegraler. $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ där $D = \{(x,y), a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ kan skrivas som $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$ där x betraktas som en konstant i första steget. Dessutom är

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

  om f är kontinuerlig. Vilket innebär att det inte gör någon skillnad åt vilket håll man integrerar från kropparna.

- Fubinis sats för rektangulärt D samt regulärt D. Om området D är regulärt kan två av gränserna skrivas som funktioner av en av variablerna och användas i första integreringen. Om $D = \{(x,y), a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ kan dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ skrivas som $\int_a^b (\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy)\, dx$.

- Variabelbyten och byte av koordinatsystem till bland annat polära koordinater, vilket behandlas mer utförligt i kapitel 3

- Med hjälp av nivåkurvor vilket behandlas mer utförligt i kapitel 4

3 Variabelbyte i dubbelintegraler

Ibland kan man stöta på figurer som man vill dubbelintegrera över som hade varit lättare att uttrycka i annat koordinatssystem än det kartesiska koordinatssystemet. Exempel på detta kan vara cirklar eller parallellogram. Då är koordinatbyte lämpligt. Hur man då skall göra för att dubbelintegrera förklarar följande sats:

SATS. *Låt*

$$\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$$

vara en bijektiv C^1*-avbildning av ett öppet begränsat kvadrerbart område* E *i uv-planet på ett motsvarande område* D *i xy-planet, sådan att* $J(u,v) = \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \neq 0$ *i* E*. Då är*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_E f(g(u,v),h(u,v))|J(u,v)|dudv,$$

om funktionerna under integraltecknen är integrerbara över respektive område.

Som vi ser i satsen så spelar funktionaldeterminanten en roll. Beloppet av $|J(u,v)|$ är nämligen den approximativa areaförstoringen för varje avbildning från varje litet delområde i E till D. Därför måste funktionaldeterminanten tas med. Det fullständiga beviset ligger utanför ramen för denna kurs.

4 Integration med hjälp av nivåkurvor

Sats (Ekvation 29 s.271)
Låt $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en $\mathcal{C}^1$-funktion o ch $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en $\mathcal{C}^0$-funktion, och låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara ett kvadrerbart område i xy-planet.

Antag $a \leq g(x,y) \leq b \ \forall (x,y) \in D$ och sätt:

$$A(u) = Area\ (\{(x,y) \in D | g(x,y) \leq u\})$$

$$\Rightarrow \iint_D h(g(x,y))dxdy = \int_a^b h(u)A'(u)du$$

Satsen gäller på grund av att integranden $h(g(x,y))$ är konstant längs en nivåkurva till $g(x,y)$. Villkoret $a \leq g(x,y) \leq b$ innebär att basområdet ligger mellan två nivåkurvor till $g(x,y)$. För att beräkna volymen är det naturligt att skiva området längs g:s nivåkurvor. I så fall blir den infinitesmala volymen $h(u)dA = h(u)A'(u)du$. En förutsättning för att kunna använda satsen är därmed att $A(u)$ och $A'(u)$ kan beräknas på ett enkelt sätt.

5 Riemannsummor

Definition: Låt f(x,y) vara en godtyckligt begränsad funktion på en axelparallell rektangel $\triangle$. Då existerar trappfunktioner ψ,φ så att $\psi \leq f \leq \varphi$. Särskilt på grund av integralers monotonitetsegenskap gäller

$$\iint\limits_{\triangle} \psi \ dxdy \leq \iint\limits_{\triangle} \varphi(x,y) \ dxdy$$

.

SATS.
Om f är integrerbar över $\triangle$ så finns ett entydigt tal λ så att

$$\iint\limits_{\triangle} \psi(x,y)dxdy \leq \lambda \leq \iint\limits_{\triangle} \varphi(x,y)dxdy$$

för alla $\psi \leq f \leq \varphi. Omdettagllersrven \lambda$ dubbelintegralen av f över $\triangle$ och betecknas $\iint\limits_{\triangle} f(x,y) \ dxdy$.

6 Generaliserade dubbelintegraler

Tidigare i kursen har vi endast behandlat begränsade områden eller begränsade integrander, detta är dock en stor inskränkning på vår förmåga att integrera många uttryck. Vi ska då bygga upp teorin för att kunna undersöka situationer då dessa förutsättningar inte gäller, det vill säga med en obegränsad yta eller obegränsad integrand.

6.1 Teori

Definition -1: Låt $a, b,c,d \in R, a \leq b\ c \leq d$
Mängden $\triangle = \{(x,y) \in R \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ $\triangle =$ [axelparallell rektangel] $=$ $[a,b] \times [c,d]$

Definition 0 :$\triangle = \{(x,y) \in R \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ är en axelparallell rektangel i x-y planet. Låt
$a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = b$ och $c = y_0 \leq y_1 \leq ... \leq y_m = d$ vara partitioner av $\triangle$. En funktion ψ är en trappfunktion om det finns partitioner så att $\psi \equiv C_{ij}$ på varje delrektangel $[x_{i-1},x_i] \times [y_{j-1},y_j]$ $i = 1,2.....n$ $j = 1,2.....m$
Definition 1: Låt $\triangle$ vara samma rektangelformade område i x-y planet som tidigare och låt $\psi : \triangle \to R$ vara en trappstegsfunktion med avseende på $a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = b$ och $c = y_0 \leq y_1 \leq ... \leq y_m = d$. Då definierar man således $\iint\limits_{\triangle} \psi(x,y)dxdy = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} C_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$. Där C_{ij} är värdet ψ antar på $[x_{i-1},x_i) \times [y_{j-1},y_j)$. Detta rektangulära område är av nödvändighet inte helt stängt.

Definition 2: $\triangle = [a,b] \times [c,d]$ Låt $f : \triangle \to R$,detta är en integrerbar funktion över $\triangle$ om det $\forall \epsilon > 0$ finns trappfunktioner $\psi, \varphi : \triangle \to R$ så att

1. $\varphi \geq f$
2. $\psi \leq f$
3. $\iint\limits_{\triangle} \varphi(x,y)dxdy - \iint\limits_{\triangle} \psi(x,y)dxdy < \epsilon$ Rent intuitivt innebär detta att man kan åstadkomma en godtycklig avsmalning av ψ,φ, två snälla funktioner att integrera, vilket betyder att f också är integrerbar. Man gör faktiskt så att man definierar

$$\iint\limits_{\triangle} f(x,y)dxdy = \sup(\iint\limits_{\triangle} \psi(x,y)dxdy) = \inf(\iint\limits_{\triangle} \varphi(x,y)dxdy)$$

om f är integrerbar på $\triangle$.

<u>SATS.</u>
$\triangle = [a,b] \times [c,d]$ $f : \triangle \to R$ där f är kontinuerlig över $\triangle$.

(a) f integrerbar över $\triangle$
(b) Båda itererade enkelintegraler av f existerar.

(c) $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$

<u>BEVIS.</u>
Definition: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $f : \mathbf{x} \to R$ kontinuerlig om $\forall \epsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ så att $|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}| < \delta \to |f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_2})| < \epsilon\, \forall x_1,x_2 \in X$

Vi ska nu hitta trappfunktioner ϕ, φ så att

(a) $\psi < f$

(b) $f < \varphi$

(c) $\iint\limits_{\triangle} \varphi(x,y)dxdy - \iint\limits_{\triangle} \psi(x,y)dxdy < \epsilon$

Eftersom $\triangle$ är en kompakt mängd och funktionen f är kontinuerlig över $\triangle$ så gäller det att $\exists\delta$ så att $|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}| < \delta \to |f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_2})| < \frac{\epsilon}{\mu(\triangle)}\, \forall \mathbf{x_1},\mathbf{x_2} \in \triangle$ $\mu(\triangle) =$ arean av $\triangle$
Välj nu partitioner så att diagonallängden är mindre än δ.
Betrakta nu den ij:te rutan $[x_{i-1},x_i] \times [y_{j-1},y_j]$, låt c_{ij} vara minimivärde på denna och låt C_{ij} vara maximivärde. Valet av rutnät ger då $C_{ij} - c_{ij} < \frac{\epsilon}{\mu(\triangle)}$
Låt ψ,φ vara funktionerna som antar C_{ij} respektive c_{ij} på $\triangle$. Och slutligen: $\iint\limits_{\triangle} \varphi(x,y)dxdy - \iint\limits_{\triangle} \psi(x,y)dxdy = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (C_{ij} - c_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) < \frac{\epsilon}{\mu(\triangle)} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \epsilon$
Bevis av 2.) Vi ska visa att båda itererade enkelintegraler existerar.
$A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ ska finnas, men f är en kontinuerlig funktion av y för fixt x. Det vill säga $f^x : [c,d] \to R, y \to f(x,y)$. $\exists A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$
Nu återstår det att bevisa att $\int_a^b A(x)dx$ existerar där $A(x)$ är en kontinuerlig funktion av x. För $\epsilon > 0$, och eftersom f är kontinuerlig gäller det att $\exists\delta > 0$ så att

$$\forall\, \mathbf{x_1},\mathbf{x_2} \in \triangle\, |\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}| < \delta \to |f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_2})| < \frac{\epsilon}{c-d}$$

$x_1,x_2 \in [a,b]$ och $|x_1 - x_2| < \delta$
$|A(x_1) - A(x_2)| = |\int_c^d f(x_1,y)dy - \int_c^d f(x_2,y)dy| \leq \int_c^d |f(x_1,y) - f(x_2,y)|dy < \int_c^d \frac{\epsilon}{c-d}dy = \epsilon$
Detta avslutar beviset.

Att en dubbelintegral kan approximeras godtyckligt noggrant av integraler med trappfunktioner innebär egentligen att ta en ändlig summa av formen:

$$\sum_k C_k \mu(\triangle_k)$$

där $\mu(\triangle_k)$ är arean av av delrektangeln $\triangle_k$ och C_k motsvarar motsvarande stapels höjd. Antag nu att man valt en punkt (ζ,η) till trappfunktionen f, tillhörande $\triangle_k$ i varje rektangel, då kan vi beteckna summan:

$$\sum_k f(\zeta,\eta)\mu(\triangle_k)$$

som Riemannsumman hörande till den aktuella indelningen av $\triangle$. Uppenbarligen kommer Riemannsummans värde att variera beroende på indelningen och valet av punkter (ζ,η), men genom att göra delrektanglarnas diagonallängd tillräckligt liten kan man få Riemannsummans värde att ligga godtyckligt nära värdet av dubbelintegralen för funktionen över $\triangle$. Formelmässigt:

$$\sum_k f(\zeta,\eta)\mu(\triangle_k) \to \iint\limits_{\triangle} f(x,y)dxdy$$

då indelningen blir obegränsad förfinad. Detta inses genom att betrakta valet av punkt i varje delrektangel. Där gäller att $m_k \leq f(\zeta,\eta) \leq M_k$ (minsta respektive största värde av f i delrektangeln. För Riemannsumman gäller alltså:

$$\sum_k m_k\mu(\triangle_k) \leq \sum_k f(\zeta,\eta)\mu(\triangle_k) \leq \sum_k M_k\mu(\triangle_k)$$

Där ytterleden är integraler av trappfunktionerna ϕ och ψ med $\phi \leq f \leq \psi$ och där skillnaden mellan dem kan göras godtyckligt liten genom tillräckligt fin indelning. Då integralen av f endast är ett tal mellan integralerna av ϕ och ψ gäller

$$\sum_k f(\zeta,\eta)\mu(\triangle_k) \to \iint\limits_{\triangle} f(x,y)dxdy$$

då indelningens finhet görs obegränsad liten.
Detta är väldigt användbart då man ska bevisa triangeloilikheten för integranden f som är kontinuerlig på $\triangle$. Enligt triangelolikheten för

summor följer ju att

$$|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta,\eta)\mu(\triangle_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta,\eta)\mu(\triangle_k)|$$

där vänsterleden betecknar Riemannsumman för f och högerledet Riemannsumman för $|f|$. Vid obegränsad förfinad indelning följer alltså:

$$|\iint_{\triangle} f(x,y)dxdy| \leq \iint_{\triangle} |f(x,y)dxdy|$$