Sammanfattning LV4-5, Grupp 5A

Anton Alm

Andreas Fernström (andferns)

William Olsson

Davit Petrosyan

Olof Lind Stefansson

10 mars 2019

1 Integration över mer allmänna områden i $\mathbb{R}^2$

1.1 Allmän definition av integrerbarhet

Låt D vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^2$ och $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ är en begränsad funktion. f sägs då vara integrerbar över D om det, för någon axelparallell rektangel Δ, där $D \subseteq \Delta$ gäller: Funktionen $f_D : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ är integrerbar över Δ där

$$f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{om} \quad (x, y) \in D \\ 0, & \text{om} \quad (x, y) \notin D. \end{cases} \tag{1}$$

I så fall definierar vi

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_\Delta f_D(x, y) dxdy \tag{2}$$

1.2 Kontroll att definitionen verkar rimlig

Givet två axelparallella rektanglar Δ_1 och Δ_2 som innehåller D så är:

Sats 1 *f_D integrerbar över $\Delta_1 \leftrightarrow f_D$ integrerbar över Δ_2*

Sats 2 *om 1 stämmer så gäller även $\iint_{\Delta_1} f_D(x, y) dxdy = \iint_{\Delta_2} f_D(x, y) dxdy$*

1.3 Definitioner

1) Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Randen till D ges av

$\partial D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n |$ varje omgivning till $\boldsymbol{x}$ som innehåller punkter både från D och $\mathbb{R}^n \setminus D\}$.

2) Låt $N \subseteq \mathbb{R}^2$. N kallas för en nollmängd om det, för varje $\epsilon > 0$, finns ett ändligt antal axelparallella rektanglar, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ så att:

i)$\bigcup_{i=1}^n \Delta_i \supseteq N$

ii)$\sum_{i=1}^n Area(\Delta_i) < \epsilon$

3) Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$. D sägs vara kvadrerbar om δD är en nollmängd.

Sats 3 *Om D är en kvadrerbar, sluten och begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$ och $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion, så är f integrerbar över D.*

Sats 4 *Om $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, där $\alpha, \beta \in C^0$ och $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig, då är*

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \tag{3}$$

2 Trippelintegraler

2.1 Definitionen av trippelintegraler

Man utgår från trappfunktioner som i detta fall är definierade på ett tredimensionellt axelparrallellt rätblock Δ, och varje axelparallel delblock Δ_{ijk}, har ett konstant värde c_{ijk}. Delblocket Δ_{ijk} är definierad så att

$$x_{i-1} \leq x < x_i, \;\; y_{j-1} \leq y < y_j, \;\; z_{k-1} \leq z < z_k. \tag{4}$$

För en trappfunktion Φ definierad på Δ, motsvarar trippelintegralen

$$\iiint_\Delta \Phi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sum_{i,j,k} c_{ijk}\mu(\Delta_{ijk}),$$

där $\mu(\Delta_{ijk})$ är volymen av varje Δ_{ijk}.

Om nu funktionen

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

är kontinuerlig och $D \subseteq \Delta$ så kan integralen för trappfunktionen skrivas om till den mer bekanta formen

$$Vol(D) = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Ett specialfall av trippelintegraler är när integranden är lika med 1, för alla $(x,y,z) \in D$, det vill säga att $f(x,y,z) \equiv 1$. Detta innebär att höjden c_{ijk} kommer vara 1 för varje delblock Δ_{ijk}. Som följd kommer trippelintegralen

$$\iiint_D dx\,dy\,dz$$

bestämma volymen av det kvadrerbara området D i $\mathbb{R}^3$.

2.2 Itererad integration

Anta att området D avgränsas av två funktionsytor

$$z = f(x,y), \;\; z = g(x,y),$$

där

$$f(x,y) \leq g(x,y), \;\; \forall(x,y) \in D.$$

Eftersom Fubinis sats gäller för trippelintegraler, är det mest lämpligt att beräkna volymen av området som

$$\iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_{\pi(D)} dx\,dy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dz,$$

där $\pi(D)$ är projektionen av D på xy-planet, det vill säga området som uppfyller att

$$\pi(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\ z, \;\; (x,y,z) \in D\}.$$

2.3 Variabelsubstitution

2.3.1 Cylindriska koordinater

Tumregeln för byte till cylindriska koordinater är att tvärsnittsarean av 3D-objektet är runda och parallella med xy-planet. Därför byts x och y koordinaterna till polära koordinater, $(x, y) \longrightarrow (r, \theta)$ men z behålls, det vill säga

$$(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, z),$$

vilket ges av

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z, \end{aligned} \tag{5}$$

där

$$\begin{aligned} 0 \leq r &\leq \infty \\ 0 \leq \theta &\leq 2\pi \\ -\infty \leq z &\leq \infty. \end{aligned} \tag{6}$$

Jacobiandeterminanten för cylindriska koordinater är det samma som för polära koordinater, därför skalas det infinitesimala volymelementet $dx\,dy\,dz$ med en faktor $1/r$, det vill säga

$$dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz.$$

2.3.2 Sfäriska koordinater

Tummregeln för byte till sfäriska koordinater är att området D verkligen är sfärisk. Därför byts de cartetiska koordinaterna (x, y, z) till sfäriska koordinater (ρ, θ, ϕ), det vill säga

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi\sin\theta \\ y &= \rho\sin\phi\sin\theta \\ z &= \rho\cos\theta, \end{aligned} \tag{7}$$

där

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho &\leq \infty \\ 0 \leq \theta &\leq \pi \\ 0 \leq \phi &\leq 2\pi. \end{aligned} \tag{8}$$

Det infinitesimala volymelementet $dx\,dy\,dz$ i sfäriska koordinater är

$$dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi,$$

där $\rho^2 \sin\theta$ är Jacobiandeterminanten för sfäriska koordinater.

2.4 Mekaniska tillämpningar

Säg att ett föremål av varierande densitet, $\rho(x, y, z)$, är utspritt över området D. Massan av föremålet är summan av alla infinitesimala massor över området,

$$massa = \iiint_D dm.$$

Den infinitesimala massan dm, kan skrivas som den infinitesimala volymen multiplicerat med densiteten i den punkten, därför kan trippelintegralen skrivas om till

$$massa = \iiint_D dm = \iiint_D \rho \; dV = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Massberäkningen kan vidare användas för att beräkna en kropps masscentrum. Beräkningen av masscentrum är en medelsvärdesberäkning och masscentrumet $\overline{m}$ ges av $\overline{m} = (m_x, m_y, m_z)$, där

$$m_x = \frac{1}{m} \iiint_\Omega x\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$m_y = \frac{1}{m} \iiint_\Omega y\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$m_z = \frac{1}{m} \iiint_\Omega z\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

där Ω är kroppen.

2.5 Multipelintegraler

2.5.1 Allmänt om multipelintegraler

Jämfört med dubbel- och trippelintegraler, uppstår det inga svårigheter att definiera integraler i $\mathbb{R}^n$, där $n \geq 3$. Om $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är ett kvadrerbart område och $f(x_1, ..., x_n)$ är en kontrinuerlig funktion, där $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, tecknar integralen

$$\iint ... \int_D f(x_1, ..., x_n)\, dx_1\, dx_2 ... dx_n$$

en volym i $\mathbb{R}^{n+1}$. Kortare kan detta betecknas som

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Integralen kan fortfarande ses som en Riemannsumma.

2.5.2 n-dimensionella enhetsklotet

Det n-dimensionella enhetsklotet B_n, är per definition området som uppfyller att

$$B_n = \{(x_1, ..., x_n) \subseteq \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\}.$$

Volymen μ_n av enhetsklotet beräknas som en multipelintegral, och för jämna $n = 2k$ är volymen

$$\mu_{2k} = \frac{\pi^k}{k!},$$

och för udda $n = 2k + 1$

$$\mu_{2k+1} = \frac{2^{2k+1}\pi^k k!}{(2k+1)!}.$$

För att beräkna volymen av det n-dimensionella klotet, B_n^r med godtycklig radie, det vill säga området som beskrivs som

$$B_n^r = \{(x_1, ..., x_n) \subseteq \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq r^2\},$$

förlängs volymen av enhetsklotet med r^n, där n är dimensionen av klotet.

Ytarean (S_n^r) av det n-dimensionella klotet med radie r kan beräknas med hjälp av den så kallade *gammafunktionen* eller genom derivering av klotets volym med avseende på radien, det vill säga

$$S_n^r = n\mu_n r^{n-1}.$$

3 Kurvor

3.1 Parameteriserade kurvor

En kurva kan ses som en vektorvärd funktion av formen

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (r_1(t), ..., r_n(t))$$

som är definierad i ett slutet intervall i $\mathbb{R}$ och med värdemängd i $\mathbb{R}^n$. En sådan parameteriserad och orienterad kurva kan även betecknas

$$\boldsymbol{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t) \longmapsto \boldsymbol{r}(t).$$

Punkten $\boldsymbol{r}(a)$ kallas kurvans startpunkt och punkten $\boldsymbol{r}(b)$ är dess slutpunkt. Bokstaven t betecknar parametern. Byte av parameterisering skall tolkas som att en partikel följer samma bana, men inte nödvändigtvis med samma fart.

Vissa kurvor betecknas med γ , och det rör sig då oftast om en kurva där orienteringen är av intresse, men inte kurvans parameterisering. Byte av orientering kan därmed betecknas med $-\gamma$.

Under kursen förekommer satser och bevis där det krävs att kurvan är av klass C^1, men det visar sig att inte alla kurvor uppfyller detta. Man kan komma runt problemet genom att studera så kallade styckvis C^1-kurvor. Genom partitionering av kurvintervallet $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$ kan kurvan delas in så att varje del blir av klass C^1, och den sammantagna kurvan noteras därmed

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$$

där γ_i betecknar indexerade kurvstycken svarande mot partitionerna. Inom fysiken har man nytta av kurvornas derivator för att finna olika storheter. Till exempel kan man låta kurvan $\boldsymbol{r}(t)$ beteckna en partikels läge vid tiden t. Då ges hastigheten av första-derivatan $\boldsymbol{r}'(t)$. Farten, som är "hastighet utan riktning", får man med absolutbeloppet $||\boldsymbol{r}'(t)||$. Fortsätter man att derivera får man accelerationen ur andraderivatan $\boldsymbol{r}''(t)$.

Kurvans längd, integralen ds från $\boldsymbol{r}(a)$ till $\boldsymbol{r}(b)$, definieras genom integralen av absolutbeloppet av derivatan med avseende på parametern enligt formeln

$$\int_a^b ||(\boldsymbol{r}'(t)||\mathrm{d}t := \int_a^b \mathrm{d}s. \tag{9}$$

3.2 Deriveringsregler

Låt $\mathbf{u}$(t) och $\mathbf{v}$(t) vara kurvor i $\mathbb{R}^n$ av klass c^1. Följande regler gäller då vid derivering:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)\right) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) \ + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)\right) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) \ + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t) \tag{11}$$

3.3 Arbetsintegral (tillämpning av (10))

Låt $\mathbf{r} : [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara en C^1-kurva och $\boldsymbol{F}$: $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ vara ett C^1 kraftfält. Då kan arbetet från en partikel som har rört sig från punkten a till punkten b beskrivas med hjälp av integralen:

$$\int_a^b \boldsymbol{F}(\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\mathrm{d}t \tag{12}$$

4 Ytor

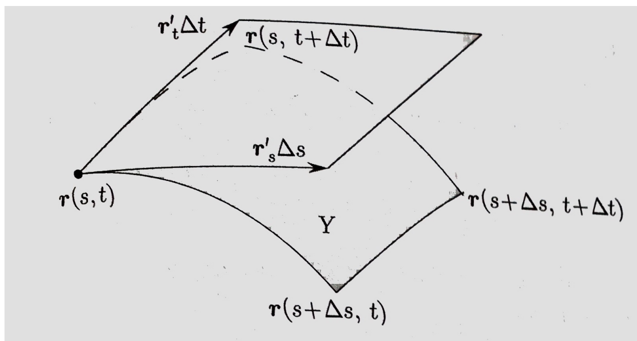
4.1 Definition av Parametriserad yta

Låt $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} : \boldsymbol{D} \mapsto \mathbb{R}^n, n \geq 2$ vara en kontinuerlig funktion. $\boldsymbol{D} \in (s,t)$.
(s,t) $\longmapsto \mathbf{r}(s,t) = (x_1(s,t), x_2(s,t) \ldots, x_n(s,t))$
Observera att denna definition gäller under antagandet att funktionen $\mathbf{r}$ är injektiv.

4.2 Exempel: Funktionsyta i $\mathbb{R}^3$

De enklaste exemplet på en parametriserad yta är parametrisering av en funtionsyta i $\mathbb{R}^3$.
$z = f(x, y) \implies \mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$

4.3 Area av buktig yta



Låt funktionen

$$\mathbf{r} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, (\mathrm{s}, \mathrm{t}) \in \mathrm{D}, \tag{13}$$

där $\mathbf{r} \in \mathrm{C}^1$, vara en parametrisering av ytan Y i $\mathbb{R}^3$. Betrakta tangentplanet till punkten (s, t). Den infinitesimala areaelementet av Y under tangentplanet begränsas av punkterna $\mathbf{r}(s, t), \mathbf{r}(s, t + \Delta t), \mathbf{r}(s + \Delta s, t + \Delta t)$, och $\mathbf{r}(s + \Delta s, t)$. Tangentplanet till ytan Y spänns upp av vektorerna $\mathbf{r}'_t$ och $\mathbf{r}'_s$. Areaelementet uppskattas genom att beräkna arean av det parallellogram som vektorerna $\mathbf{r}'_t\Delta t$ och $\mathbf{r}'_s\Delta s$ spänner upp.Enligt figur 4.3 blir arean av det infinitesimala areaelementet lika med

$$\mid (\mathbf{r}'_s\Delta s) \times (\mathbf{r}'_t\Delta t) \mid = \mid \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t \mid \Delta s\Delta t \tag{14}$$

Man kan därmed uppfatta

$$dS = \mid \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t \mid dsdt \tag{15}$$

som ett areaelement på Y. Därmed definierar vi arean av Y,med ekvation (13) given, som

$$\int_Y dS = \iint_D \mid \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t \mid dsdt \tag{16}$$

4.4 Exempel: Klotets mantelarea

Beteckna parametriseringen av sfären Ω med radie r m.h.a sfäriska koordinater

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\theta, \phi) = (r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\phi)) \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{aligned} \tag{17}$$

Sedan beräknar vi de vektorer som spänner upp tangentplanet

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_\theta &= r(\cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta) sin(\phi), -\sin(\theta)) \\ \mathbf{r}'_\phi &= r(-\sin(\theta)\sin(\phi), \sin(\theta)\cos(\phi), 0)\end{aligned} \tag{18}$$

Därefter beräknar vi kryssprodukten

$$\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = r^2(\sin^2(\theta)\cos(\phi), \sin^2(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta)\sin(\theta)) \tag{19}$$

Beräkningarna fortskrider med beräkningen av kryssproduktens absolutbelopp

$$\mid \mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi \mid = r^2\sqrt{\sin^4(\theta) + \cos^2(\theta)\sin^2(\theta)} = r^2\sqrt{\sin^2(\theta)} = r^2 \mid \sin(\theta) \mid = r^2 \sin(\theta) \tag{20}$$

Detta resulterar i att sfärens area blir

$$\iint_\Omega dS = \iint_{\substack{0\le\theta\le\pi \\ 0\le\phi\le 2\pi}} r^2 \sin(\theta)\ d\theta d\phi = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin(\theta)\ d\theta = 4\pi r^2 \tag{21}$$