Tavelpresentation LV 4 och 5

Jesper Jäghagen, Martin Almqvist, Rasmus Durgé,
Christian Nedgård, Filip Lindström, Jeremy Sandberg

Teknisk Fysik, Chalmers
Flervariabelsanalys (MVE035)

5 mars 2019

Sammanfattning

Sammanfattning av läsvecka fyra och fems föreläsningar i flervariabelsanalys. Här sammanfattas definitioner, tillämpningar och beräkningsmetoder för integraler av tre eller fler variabler. Rapporten innehåller dessutom definitioner och beräkningsmetoder för parametriseringar av kurvor och ytor, samt teori kring kurvintegraler.

1 Multipelintegraler

1.1 Trippelintegraler

Definitionen av en trippelintegral påminner väldigt mycket om definitionen för en dubbelintegral, skillnaden är att en ny dimension har lagts till. Detta innebär att istället för att tala om trappstegsfunktioner definierade över axelparallella rutnät i planet så talar man istället om trappstegsfunktioner definierade över axelparallella rätblock Δ i rummet. Funktionerna är därmed definierade över små delblocken Δ_{ijk} och där antar funktionerna konstanta värden c_{ijk}. Delblockens dimensioner definieras av olikheterna $x_{i-1} \leq x < x_i$, $y_{i-1} \leq y < y_i$ och $z_{i-1} \leq z < z_i$. Alltså kan trippelintegralen för en trappfunktion Φ över volymen Δ skrivas som

$$\iiint_{\Delta} \Phi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_{i,j,k} c_{ijk} vol(\Delta_{ijk}), \tag{1}$$

där $vol(\Delta_{ijk})$ beskriver volymen för ett delblock. Denna enklare definition av trippelintegral kan utvidgas, precis som för fallet med dubbelintegraler, till

$$\iiint_{D} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{2}$$

där D är en begränsad och kvadrerbar volym i rummet ($D \in \mathbb{R}^3$). Funktionen $f(x, y, z)$ är dessutom definierad på D. Den geometriska tolkningen av trippelintegralen är att den tecknar en volym i $\mathbb{R}^4$, då de infinitesimala längdelementen $dx\, dy\, dz$ tecknar en infinitesimal volym dV och $f(x, y, z)$ tecknar höjden i den fjärde dimensionen.

1.2 Variabelsubstitution

Ett vanligt knep för att lösa trippelintegraler är att göra variabel substitutioner eller så kallade koordinatbyten. Två väldigt vanliga koordinatbyten är till cylindriska- eller sfäriskakoordinater.

Tumregeln för att göra ett cylindriskt koordinatbyte är då xy-planet eller något av de andra basplanen har ett runt tvärsnitt, medans z-axeln eller den återstående axeln beror av något annat samband, se exempel kropp i figur 1 och 2. Då substitueras (x, y) mot (r, θ) och z koordinaten behålls. Substitutionen ser ut på följande sätt

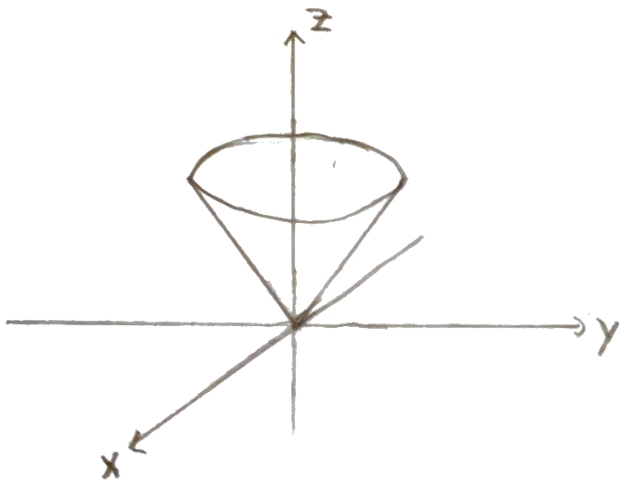
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \tag{3}$$

där vinkeln $\theta \in [0, 2\pi)$ och radien $r \in [0, \infty)$. Det är även viktigt att ta hänsyn till hur volymelementen förändrar sig då koordinaterna ändras, därför används Jakobiandeterminanten som skalande faktor. Jakobiandeterminanten för ett byte från cartesiska till cylindriska koordinater bestäms på följande sätt

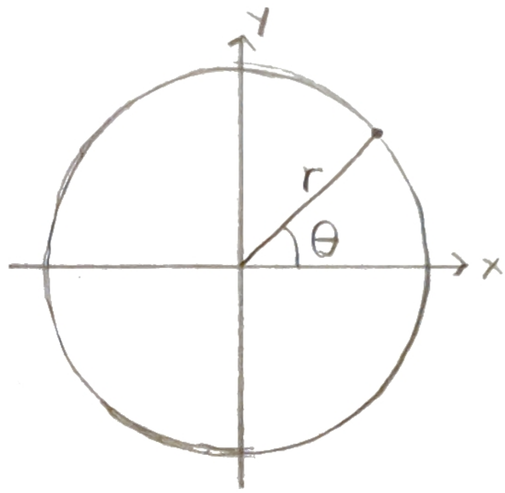
$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} \right| = r. \tag{4}$$

Alltså kommer variabelbytet från kartesiska till cylindriska koordinater för en godtycklig trippelintegral att skrivas

$$\iiint_{D} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{D'} f(r, \theta, z) r\, dr\, d\theta\, dz. \tag{5}$$



Figur 1: Schematisk bild över integrationsgränserna för en kropp D, där det kan vara lämpligt att byta till cylindriska koordinater.



Figur 2: Schematisk bild över xy-tvärsnittet i konen i figur 1. Radien är r och vinkeln mellan x-axeln och radien är θ.

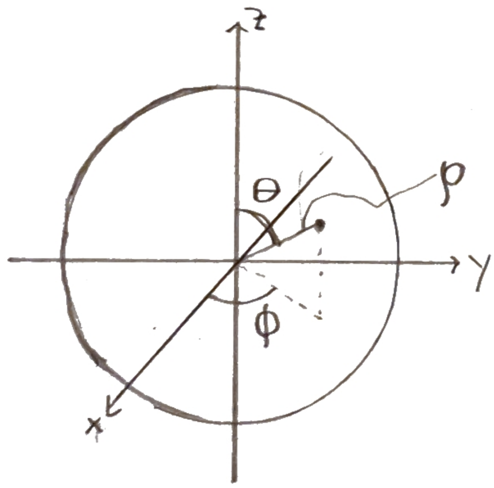
En annan substitution är att byta till sfäriska koordinater, vilket man gör vid integration över sfäriska kroppar, se exempel i figur 3. Då går man från kartesiska koordinater (x, y, z) till sfäriska koordinater (ρ, θ, ϕ). Jakobiandeterminanten som används i variabelbytet är

$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} \right| = \rho^2 sin(\theta). \tag{6}$$

Själva variabelbytet ser ut på följande sätt

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\phi \\ y = \rho \sin\theta \sin\phi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}, \tag{7}$$

där $\rho \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ och $\Phi in[0, 2\pi)$.



Figur 3: Schematisk bild över integrationsgränserna för en sfärisk kropp D, där det kan vara lämpligt att byta till sfäriska koordinater. Radien är ρ och vinkeln θ är definierad mellan z-axeln och radien, medan vinkeln Φ är definierad mellan radieprojektionen på xy-planet och x-axeln.

1.3 N-dimensionella integraler

En n-dimensionell integral definieras på följande vis: Om $D \in \mathbb{R}^n$, så är $vol(D) = \iint ... \int_D dx_1\, dx_2 ... dx_n$. Ett exempel på flerdimensionella volymer är enhetsklotet, som kan beräknas med följande sats i ett godtyckligt rum.

Låt $\mu_n = vol(B_n)$, där B_n är det n-dimensionella enhetsklotet och beskrivs mattematiskt som

$$B_n = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\right\}. \tag{8}$$

Då gäller att den rekursiva formeln för volymen $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = \pi$ och $\mu_n = \frac{2\pi}{n}\mu_{n-2}$ för alla $n \geq 3$.

2 Volymberäkningar

Antag att området D $\subseteq \mathbb{R}^3$ är begränsad och kvadrerbart och funktionen $f(x, y, z)$ är definierad på D. Då kan $f(x, y, z)$ ses som den tecknade höjden vilket tillsammans med dxdydz skapar den tecknade volymen i $\mathbb{R}^4$ Special fallet $f(x, y, z) = 1$, leder till att $\iiint_D dxdydz =$ volymen vilket även kan vara lika med massan beroende på vilka parametrar som används.

Allmänt kan vi beräkna volymen av en kropp K mellan två funktionsytor $z = f(x, y), z = g(x, y)$ där $f(x, y) \leq g(x, y), \forall(x, y)$ till områdets projektion på xy-planet. Vilket kan uttryckas med dubbelintegralen och enkelintegralen

$$\iint_{\pi(D)} \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dxdydz, \tag{9}$$

där $\pi(D) =$ projektionen av D på (x, y)-planet $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \exists z : (x, y, z) \in D\}$.

Volymen av en tetraeder i godtycklig dimension fås med följande formel.

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} x_i \leq u\} = u^n/n! \tag{10}$$

3 Massa och masscentrum

Låt ett föremål ha densiteten ρ, där $\rho = \rho(x, y, z)$ över ett område D. D är alltså området som föremålet upptar. Den totala massan blir då

$$M = \iiint_D dm = \iiint_D \rho dV = \iiint_D \rho(x, y, z)dxdydx. \tag{11}$$

En kropps masscentrum (tyngdpunkt), $\bar{m}$, kan definieras som den punkt kring vilken kroppen är i momentjämvikt med avseende på varje tänkt tyngdkraft från varje infinitesimalt masselement, dm. Det krävs tre ekvationer för att bestämma tyngdpunkten, $\bar{m} = (m_x, m_y, m_z)$, en för varje komponent. Antag att tyngdkraften verkar i z-axelns riktning. Då blir momentet för ett masselement, $dm = \rho(x, y, z)dxdydz$, i punkten (x, y, z) m.a.p en axel genom $\bar{m}$ parallell med y-axeln

$$g(\rho(x, y, z)dxdydz)(x - m_x),$$

där g är tyngdaccelerationen. Via integration fås hela kroppens moment. Eftersom jämvikt ska råda, erhålls följande ekvation

$$\iiint_D (x - m_x)\rho(x, y, z)dxdydz = 0.$$

Via denna ekvation fås att x-koordinaten för tyngdpunkten blir

$$m_x = \frac{\iiint_D x\rho(x, y, x)dxdydz}{\iiint_D \rho(x, y, x)dxdydz},$$

där $\iiint_D \rho(x, y, x)dxdydz$ är kroppens massa, M. Tyngdpunktens y- och z-koordinat bestäms på samma sätt enligt,

$$m_i = \frac{\iiint_D x_i\rho(x, y, x)dxdydz}{M}, i = 1, 2, 3. \tag{12}$$

4 Kurvor

4.1 Kurvor och dess parametrisering

En funktion på formen $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), ..., x_p(t))$ definierad på ett intervall $\alpha \leq t \leq \beta$ och med värden i $\mathbf{R}^p$ ($p \in \mathbf{N}$) är den enklaste varianten av en vektorvärd funktion, nämligen en kurva. Vi kallar $\mathbf{x}(\alpha)$ för kurvans startpunkt och $\mathbf{x}(\beta)$ för kurvans slutpunkt samt t för parametern.

Man betraktar kurvor som uppkommer ur varandra genom ett parameterbyte som identiska. Det innebär att om kurvan γ ges av

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

och om φ är en strängt växande funktion på något intervall $a \leq t \leq b$ med värdemängden $\alpha \leq t \leq \beta$, så identifierar vi även kurvan γ som

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\varphi(s)).$$

En rörelse utmed en kurva förändras inte vid ett parameterbyte, men rörelsens hastighet utmed kurvan förändras.

En kurva γ sägs tillhöra klassen C^1 om $x_1(t), ..., x_p(t)$ alla också är av klassen C^1. Om γ tillhör C^1 krävs det även att φ och φ^{-1} tillhör C^1 för att parameterbyten ska kunna genomföras.

För att vi ska kunna ta fram derivatan av en kurva γ krävs det att γ tillhör C^1. Derivatan ges då av

$$\mathbf{x}'(t) = (x_1'(t), ..., x_p'(t)).$$

Fyra viktiga räkneregler för derivering av C^1-kurvor i $\mathbf{R}^p$ är:

- $\frac{d}{dt}(c\mathbf{x}(t)) = c\mathbf{x}'(t)$
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)) = \mathbf{x}'(t) + \mathbf{y}'(t)$
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t)) = \mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}'(t)$
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}(t)) = \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}'(t)$, Endast för kurvor i $\mathbf{R}^3$.

4.2 Hastighet, fart och acceleration

Inom fysiken har parameterframställningen en viktig mekanisk tillämpning då $\mathbf{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ ses som en beskrivning av partikelns läge vid tiden t (ortsvektor), då partikeln rör sig i en bana från $\mathbf{r}(\alpha)$ till $\mathbf{r}(\beta)$. Om vi låter $\mathbf{r}(t)$ tillhöra klassen C^2 så kan vi definiera följande:

- Def $\quad \mathbf{r}'(t)$ = partikelns momentanhastighet vid tiden t. Bildar en tangentvektor till kurvan i kurvans riktning.
- Def $\quad || \mathbf{r}'(t) ||$= partikelns fart, det vill säga storleken på hastigheten.
- Def $\quad \mathbf{r}''(t)$ = partikelns momentanacceleration vid tiden t.

4.3 Kurvans längd

Som nämnt ovan ges kurvans momentanfart av $|| \mathbf{r}'(t) ||$, vilket betyder att under den infinitesimala tiden dt rör sig partikeln den infinitesimala sträckan $ds =|| r'(t) || dt$. Det innebär att om vi integrerar från α till β över den infinitesimala sträckan ds får vi hela kurvans längd mellan α och β. Alltså

$$\text{Kurvans längd} = \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta || \mathbf{r}'(t) || \, dt. \tag{13}$$

Ett annat sätt att uttrycka kurvlängden i ekvation 13 för en C^1- kurva i $\mathbf{R}^p$ är genom att direkt räkna ut momentanfarten i uttrycket, så som i ekvation 14 nedan.

$$\text{Kurvans längd} = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{i=1}^{p} [x_i'(t)]^2}. \tag{14}$$

4.4 Integration av skalärfält längs kurvor

Låt $r(t), a \leq t \leq b$, vara en parametriserad C^1-kurva i R^n och $f(x)$ en integrerbar funktion av n variabler. Integralen av f längs kurvan är

$$\int_a^b f(r(t)) \mid r'(t) \mid \, dt.$$

5 Parametrisering av ytor

Betrakta en funktion $r : R^2 \to R^3$ som har formen $r(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$. Den bildar en så kallad parameteryta med parametrar (s,t). Om även komponentfunktionerna $(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ är av klass C^1 kallas det för en parametriserad C^1-yta.

5.1 Area av buktig yta

Arean av en yta $\mathbf{Y}$ beräknas med

$$Area(\mathbf{Y}) = \iint_Y \mathbf{dS}$$

där $\mathbf{dS}$ betecknar det infitesimala areaelementet. Givet en parametrisering $\mathbf{r}(s,t)$ av ytan $\mathbf{Y}$ kan $\mathbf{dS}$ approximeras i en viss punkt (s,t) genom att observera tangentplanet som spänns upp av vektorerna r_s' och r_t'. För att approximera areasegmentet $\mathbf{dS}$ med sidlängder ds och dt används den geometriska tolkningen av vektorprodukt.

$$dS = \mid (r_s' ds) \times (r_t' dt) \mid = \mid r_s' \times r_t' \mid \, ds\, dt$$

Sats: Låt D vara ett begränsat område i R^2 och $r : D \to R^3$ en parametriserad c^1- yta $\mathbf{Y}$. Då gäller

$$Area(\mathbf{Y_D}) = \iint_D \mid r_s' \times r_t' \mid \, ds\, dt$$

5.2 Area av funktionsyta

För en parameterframställning av en funktionsyta med x och y som parametrar fås:

$$\begin{aligned} &r = (x, y, f(x,y)), \quad (x,y) \in D \\ &\Rightarrow r_x' = (1, 0, f_x'), r_y' = (0, 1, f_y') \\ &\Rightarrow \mid r_x' \times r_y' \mid = \mid (-f_x', -f_y', 1) \mid = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} \end{aligned}$$

Sats: Låt $r(x,y) = (x, y, f(x,y))$ vara en funktionsyta. Då gäller:

$$Area(\mathbf{Y_D}) = \iint_D \mid r_x' \times r_y' \mid \, dx\, dy = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dx\, dy$$

5.3 Integration av skalärfält över ytor

Låt $r : D \to R^3$, vara en parametriserad C^1-yta och $f : R^3 \to R$ en skalärvärd integrerar funktion. Då gäller att integralen av f över ytan är:

$$\iint_D f(r(s,t)) \mid r_s' \times r_t' \mid \, ds\, dt$$

6 Kurvintegraler

Kurvintegraler kan beskrivas grafiskt. Antag att vi har ett vektorfält $F(x, y)$ i xyz-planet. Antag sedan att vi har en envariabelsfunktion f(x) som beskriver en kurva i f i xy-planet. Alla punkter mellan vektorfältet och kurvan c bildar en yta D. Arean av ytan D kallas för kurvintegralen av F(x,y) längs f.
Kurvintegraler definieras rent matematiskt enligt följande. Låt

$$F(r) = (A(r), B(r)) = (A(x, y), B(x, y))$$

vara ett kontinuerligt vektorfält i en öppen mängd D $\subseteq$ R. Antag att vi har en orienterad C^1-kurva γ med parameterframställningen

$$r = r(t) = (x(t), y(t)), \alpha \leq t \leq \beta$$

då kallar vi uttrycket (15)

$$\int_\alpha^\beta F(r(t)) * r'(t)dt = \int_\alpha^\beta (A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t)), y(t))y'(t))dt \tag{15}$$

för **kurvintegralen** av fältet F=(A,B) längs kurvan γ. Den kan också betecknas med

$$\int_\gamma F dr \, eller \int_\gamma A dx + B dy.$$