Sammanfattning av föreläsningar läsvecka 4 och läsvecka 5

Hifaa Al Remawi, Viet Tu Nguyen, Kristoffer Johansson, Benjamin Reehorst

March 7, 2019

1 Integration över godtyckliga områden i $\mathbb{R}^2$:

1.1 En allmän definition av integrerbarhet:

Definition:
Låt D vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^2$ och f :D$\to$ $\mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. f sägs vara integrerbar över D om det för någon axelparallell rektangel $\Delta \supseteq D$ gäller:
$f_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är integerbar över Δ där:

$$f_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

I så fall:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f_D(x,y)dxdy$$

Givet två axelparallella rektanglar Δ_1 och Δ_2 som både innehåller D. Då är f_D integrerbar över Δ_1 om och endast om den är integrerbar över Δ_2. För att denna definition ska ha någon mening så måste integralerna vara lika, det vill säga:

$$\iint_{\Delta_2} f_D(x,y)dxdy = \iint_{\Delta_1} f_D(x,y)dxdy$$

vilket är fallet.

1.2 Villkor för integrerbarhet

Grundfrågan: För vilka områden D är det garanterat att en kontinuerlig funktion på D är integrerbar?
Frågan besvaras av följande sats.

Sats:
a. Om D är en kvadrerbar, sluten och begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$ och $f : D \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion så är f integrerbar över D
b. Om $D = \{(x, y); a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ där $\alpha, \beta \in C^0$ och $f : D \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig, då gäller:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$$

Definition 1: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Randen till D ges av:
$\delta D = \{X \in \mathbb{R}^n$: varje omgivning av X innehåller punkter från D och $\mathbb{R}^n \setminus D\}$

Definition 2: Låt $N \subseteq \mathbb{R}^3$. N kallas för en nollmängd om det för varje $\epsilon > 0$ $\exists$ ett ändligt antal axelparallella rätblock $\Delta_1, ..., \Delta_n$ så att:

- $\cup_{i=1}^n \Delta_i \supseteq N$
- $\sum_{i=1}^n$ Area $(\Delta_i) < \epsilon$

Definition 3: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en begränsad mängd. D sägs vara kvadrerbar om δD är nollmängd.

Anmärkning:
Satsen garanterar att kontinuerliga funktioner som är definierade på kvadrerbara områden är integrerbara. Med integrerbarhet menas Riemmanintegraler. Icke-kvadrerbara områden kan ha en väldefinierad integral i andra teorier som Lebesgueintegraler.

2 Trippelintegraler & Multipelintegraler:

Trippelintegraler är särskilt användbara vid volymbestämning av godtyckliga kroppar. Dess andra tillämpningar omfattar bland annat massaberäkning och bestämning av en kropps masscentrum.

När det gäller den teoretiska delen, finns det ingenting speciellt med trippelintegraler. Teorin som gicks igenom i kapitlet om dubbelintegraler gäller alltså för trippelintegraler och multipelintegraler.

2.1 Volymbestämning

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett begränsat kvadrerbart område. Låt funktionen $f(x, y, z)$ vara definerad på D. Då definierar trippelintegralen $\iiint_D f(x, y, z)dxdydz$ en tecknad volym i $\mathbb{R}^4$.

Speciellt är $\iiint_D dxdydz = \mathrm{Vol}(D)$ om $f(x,y,z) = 1$.

Om en kropp K kan betraktas som ett område som avgränsas av två funktionsytor $z = f(x,y)$ och $z = g(x,y)$ där $f(x,y) \leq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in \pi(K)$, där $\pi(K)$ är kroppens projektion på xy-planet, då beräknas kroppens volym med hjälp av följande integral:

$$V = \iiint_K dxdydz = \iint_{\pi(K)} dxdy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dz$$

$$\pi(K) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists z : (x,y,z) \in K\}$$

2.2 Variabelbyte i trippelintegraler

Den vanligaste typen av variabelbyte är bytet till sfäriska eller cylinderiska koordinater. Bytet till cylinderiska koordinater är mest lämpligt då vi har runda tvärsnitt som är parallella med xy-planet och en höjd i z-riktningen som endast går "upp och ner". Vid variabelbyte är det viktigt att ta hänsyn till förändring av den infinitesimala volymen i olika koordinatsystem. För cylinderiska koordinater kan detta fås genom följande samband:

$$dxdydz = \left|\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|\right| \cdot drd\theta dz = rdrd\theta dz$$

Sfäriska koordinater används till helt runda föremål i 3D som klot. Förändringen av den infinitesmala volymen blir då:

$$dxdydz = \left|\left|\frac{\partial(x,y,z}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right|\right| \cdot d\rho d\theta d\phi = \rho^2 sin\theta \; d\rho d\theta d\phi.$$

2.3 Mekaniska tillämpningar

2.3.1 Massa

Antag att vi har ett föremål med varierande densitet $\rho(x,y,z)$, utspritt över ett område Ω. Då beräknas den totala massan med hjälp av följande integral:

$$Totalmassa = \iiint_D dm = \iiint_D \rho(x,y,z)dxdydz$$

2.3.2 Masscentrum

En kropp vars densitet ges av $\rho(x,y,z)$ som är utspritt över ett område Ω har ett masscentrum $\bar{m} = (m_x, m_y, m_z)$ var kring är kroppen balanserad med avseende på koordinataxlarna. Bestämning av masscentrumet sker med hjälp av följande integraler :

$$m_x = \frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)dxdydz}$$

$$m_y = \frac{\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)dxdydz}$$

$$m_z = \frac{\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)dxdydz}$$

2.4 Multipelintegraler

Om $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är ett kvadrerbart område så är följande integral väldefinierad:

$$Vol\ (D) = \int\int\int ... \int_D dx_1 dx_2....dx_n$$

Sådana integraler kallas för multipelintegraler och kan räknas med hjälp av itererad integrering och samma tekniker som används vid beräkningen av dubbelintegraler.
Trots att det är svårt att få en geometrisk tolkning av multipelintegraler så kan man exempelvis tala om den n-dimensionella enhetsklotet, B_n som definieras som:

$$B_n = \Big\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=n}^{n} x_i^2 \leq 1\Big\}$$

Sats:
Låt μ_n =Vol(B_n). Då gäller:
$\mu_1 = 2$
$\mu_2 = \pi$
$\mu_n = \frac{2\pi}{n}\mu_{n-2} \ \ \forall n \geq 3$

Bevis:

$$\begin{aligned}
B_n &= \Big\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\Big\} \\
&= \Big\{(x_1, ..., x_n) | x_n^2 + x_{n-1}^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2\Big\} \\
\text{Vol}(B_n) &= \int\int ... \int_{B_n} dx_1 ... dx_n \\
&= \int\int ... \int_{B_{n-2}} dx_1 ... dx_{n-2} \iint_{x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2} dx_{n-1} dx_n \\
&= \int ... \int_{B_{n-2}} \pi\Big(1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2\Big) dx_1 ... dx_{n-2}
\end{aligned}$$

Låt

$$
\begin{aligned}
g(x_1,...,x_{n-2}) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} x_i^2} \\
B_{n-2} &= \Big\{(x_1,...,x_{n-2})\Big|0 \leq g(x_1,....,x_{n-2}) \leq 1\Big\} \\
h(u) &= 1-u^2 \\
\implies \mu_n &= \pi \int_0^1 h(u)\ V'(u)\ du \\
V(u) &= Vol\Big\{(x_1,....,x_{n-2}|0 \leq g(x_1,....,x_{n-2}) \leq u\Big\} \\
&= \mathrm{Vol}(B_{n-2}^u) \\
&= \mu_{n-2} u^{n-2} \\
\implies \mu_n &= \pi\ (n-2)\ \mu_{n-2}\ \int_0^1 (1-u^2)\ u^{n-3} du \\
\mu_n &= \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2}
\end{aligned}
$$

□

3 Vektorvärda funktioner:

3.1 Kurvor

Kurvor är en av de enklaste typerna av vektorvärda funktioner.

Definition Låt $n \in \mathbb{N}$. En parametriserad orienterad kurva i $\mathbb{R}^n$ är en kontinuerlig funktion, $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ där $I = [a,b]$ är ett slutet intervall i $\mathbb{R}$.

Man skriver då $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \mathbf{r}(t)$, t kallas här parametern.

En vanlig fysikalisk tolkning är $\mathbf{r}(t)$ är en partikelns läge vid tiden t, då partikeln rör sig i en bana från $\mathbf{r}(a)$ till $\mathbf{r}(b)$.

Definition 2: Vektorn $\mathbf{r}'(t)$ motsvarar hastigeten vid tiden t. Den är en tangent till kurvan och i kurvans riktning. På så sätt är $\big\|\mathbf{r}'(t)\big\|$ farten och $\mathbf{r}''(t)$ accelerationen.

Kontroll: Kurvans längd är oberoende av parametrisering.
Bevis
kurvans längd ges av:

$$\int_a^b \big\|\mathbf{r}'(k)\big\|\, dk$$

där k är en parameter.
Låt $\mathbf{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{r}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ vara 2 olika parametriseringar av samma C^1-kurva. Då måste det finnas en strängt växande funktion $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ så att:
$\varphi(c) = a$
$\varphi(d) = b$
$\mathbf{r}_1(\varphi(s)) = \mathbf{r}_2(s), \forall s \in [c,d]$.

Det som ska visas är att följande gäller:

$$\int_a^b \left\|\mathbf{r}_1'(t)\right\| dt = \int_c^d \left\|\mathbf{r}_2'(s)\right\| ds$$

Sätt: $t = \varphi(s)$
$t = a \Rightarrow s = c$
$t = b \Rightarrow s = d$

$$\Rightarrow \int_a^b \left\|\mathbf{r_1}'(t)\right\| dt = \int_c^d \left\|\frac{d}{dt}\mathbf{r}_1\varphi(s)\varphi'(s)\right\| ds$$
$$= \int_c^d \left\|\frac{d}{ds}\mathbf{r}_1(\varphi(s))\right\| ds = \int_c^d \left\|\frac{d}{ds}\mathbf{r}_2(s)\right\| ds$$

$\square$

Om $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ så är $\mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), ..., x_n'(t))$ och då ges kurvans längd av följande integral:

$$\int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i'(t))^2}\, dt$$

Specialfall:

$\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$, där $y = f(t)$
$\Rightarrow$ längd $= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$

Proposition:

1) Om $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ är C^1-kurvor i $\mathbb{R}^n$, så är:
$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$.
2) Om $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ är C^1-kurvor i $\mathbb{R}^3$, så är:
$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$.

Bevis av proposition 1:
Låt $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t))$ och $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), ..., v_n(t))$.

$$\Rightarrow \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\cdot v_i(t) \Rightarrow \tfrac{d}{dt}(\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\big(u_i(t)\cdot v_i(t)\big)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \big(u_i'(t)\cdot v_i(t) + u_i(t)\cdot v_i'(t)\big) = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t).$$

□

Tillämpning av proposition 1:

Vi låter $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ vara en C^1-kurva och $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ett C^1-vektorfält. Vi kan då studera

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)dt \cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

Men hur kan vi tolka detta fysikaliskt? Vad innebär det? Detta är en så kallad arbetsintegral som beskriver arbetet som kraftfältet $\mathbf{F}$ uträttar på en partikel som rör sig längs banan. Om vi antar att partikeln faller fritt i fältet $\mathbf{F}$ så gäller följande enligt Newtons andra lag för att beskriva förändringen i kinetisk energi:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{P} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{r}'(t)) = m\mathbf{r}''(t) \Rightarrow arbetet = m\int_a^b \mathbf{r}''(t)\cdot\mathbf{r}'(t)dt \overset{1.}{=}$$

$$\frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}(\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}'(t))dt = \frac{m}{2}||\mathbf{r}'(t)||^2\Big|_{t=a}^{t=b} = \frac{m}{2}(||\mathbf{r}'(b)||^2 - ||\mathbf{r}'(a)||^2)$$

□

Tillämpning av proposition 2:

Om vi låter $\mathbf{r}(t)$ beskriva en partikels ortsvektor med avseende på ett utvalt origo O, så sägs partikeln utföra en centralrörelse om $\mathbf{r}''(t)$ alltid är riktad mot O.

Definition: En partikels vinkelmomentum är $m(\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t))$.

Proposition: En partikels vinkelmomentum är konstant om den utför en centralrörelse.

Bevis: Enligt proposition 2 så gäller följande

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)) = \mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}''(t)$$

Eftersom partikeln utför en centralrörelse är $\mathbf{r}''$ antiparallell med $\mathbf{r}$. Detta medför att både termerna är $= 0$ ty vektorerna vars kryssprodukt vi tar är parallella.

□

Detta kallas även för Keplers lag.

4 Ytor

Ytor definieras på följande vis: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^n$,$n \geq 2$ vara en kontinuerlig funktion $D \ni (s,t) \mapsto \mathbf{r}(s,t) = (x_1(s,t), ..., (x_n(s,t))$. Detta kallas för en parametriserad yta. Man kan anta utan förlust av allmängiltighet att funktionen $\mathbf{r}$ är injektiv.

4.1 Formel för det infinitesimala areaelementet i $\mathbb{R}^3$:

$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$. Om vi betraktar vektorerna:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

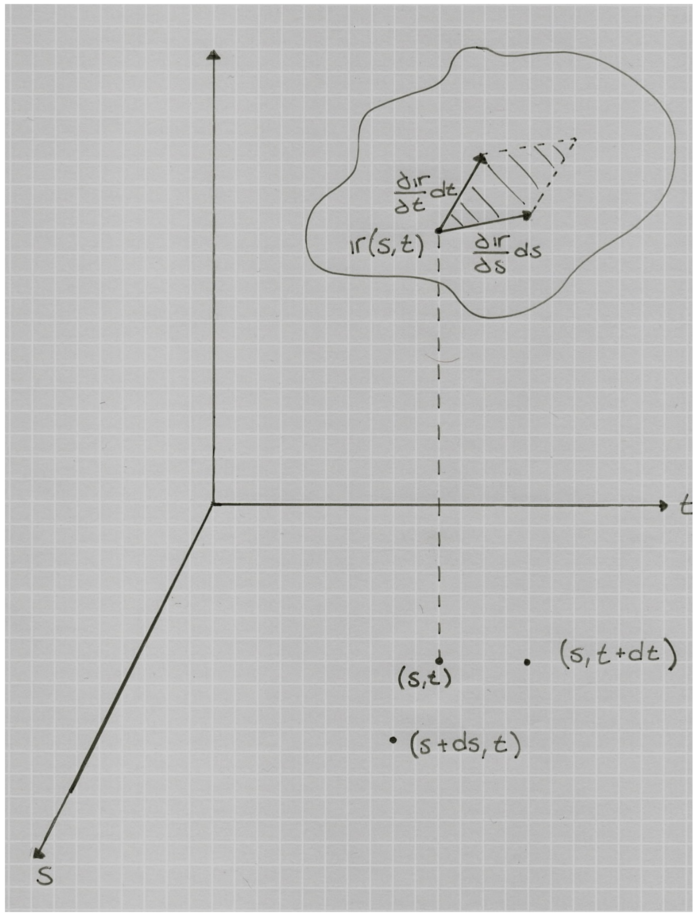
Den infinitesimala arean:
dS=Parallellogramets area$= ||\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}ds \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}dt|| = ||\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}||dsdt$
$\Rightarrow$Ytans totala area är:$\iint_D dS = \iint_D ||\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}||dsdt$
Detta är under förutsättningen att $\mathbf{r}(s,t)$ är en C^1-funktion. Det formella kravet för en C^1-parametriserad yta är att $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}$ aldrig skall vara parallella.

<u>Specialfall 1:</u>
Funktionsyta $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, f(x,y)), f \in C^1$.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x})$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y})$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{bmatrix} = (-f_x, -f_y, 1)$$
$$\Rightarrow ||\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}|| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$
$$\Rightarrow \text{Arean av en funktionsyta} = \iint_{D=\pi(Y)} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\; dxdy,$$

där $D = \pi(Y)$ är ytans projektion på xy-planet.

<u>Specialfall 2:</u>
Implicit funktionsyta $F(x,y,z) = C$, där $F_z \neq 0$.



Implicita funktionssats $\Rightarrow z = f(x, y), f_x = \frac{-F_x}{F_z}$ och $f_y = \frac{-F_y}{F_z}$.
$\Rightarrow Arean = \iint_{\pi(Y)} \sqrt{\left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2 + 1}\, dxdy = \iint_{\pi(Y)} \frac{||\nabla F||}{|F_z|} dxdy$