Sammanfattning lv. 4, 5 – 5D-1

Martin Due (duem), Tobias Hainer (hainer), Oskar Molin (mooskar),
Alexander Samuelsson (alesam), Ruben Seyer (rubense)

6 mars 2019

1 Integrerbarhet (i $\mathbb{R}^2$)

Definition 1.1. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$. *Randen* till D ges av

$$\partial D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \text{ varje omgivning till } \boldsymbol{x} \text{ innehåller punkter från } D \text{ och } \mathbb{R}^n \setminus D\}$$

Definition 1.2. Låt $N \subseteq \mathbb{R}^2$. N kallas för en *nollmängd* om det $\forall \varepsilon > 0$ finns ett ändligt antal axelparallella rektanglar $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ s.a.

(i)
$$\bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i \supseteq N$$

(ii)
$$\sum_{i=1}^{n} \text{Area}(\Delta_i) < \varepsilon$$

Definition 1.3. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$, vara en begränsad mängd. D sägs vara *kvadrerbar* om ∂D är en nollmängd.

Definition 1.4. Låt D vara ett begränsat kvaderbart område i $\mathbb{R}^2$ och $f : D \to R$ en begränsad funktion. f sägs vara *integrerbar* över D om det för någon axelparallell rektangel $\Delta \supseteq D$ gäller att funktionen $f_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är integrerbar över Δ där

$$f_D(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Då blir

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy := \iint_\Delta f_D(x,y)\,dx\,dy \tag{1.1}$$

1.1 Exempel

1. Varje C^1 - kurva är en nollmängd, dvs.

$$\gamma = \{(x(t),\, y(t)) \,|\, a \le t \le b,\; x(t),y(t) \in C^1\}$$

2. Varje C^0 - funktionskurva i planet är en nollmängd, dvs.

$$\gamma = \{(x,\, f(x)) \,|\, a \le x \le b,\; f \in C^0\}$$

3. Om $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vars rand är styckvis en C^1-kurva eller en C^0-funktionskurva så är D kvadrerbart.

2 Trippelintegraler

Definition 2.1. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett begränsat kvadrerbart område samt låt $f(x,y,z) : D \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då är

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

en tecknad hypervolym i $\mathbb{R}^4$.

Trippelintegraler definieras, precis som dubbelintegraler, med hjälp av trappstegsfunktioner. Följer man samma mönster blir det alltså inga problem att införa integraler av funktioner av tre variabler. I tre variabler är trappfunktionerna definierade på ett axelparallellt rätblock δ och med konstanta värden c_{ijk} på axelparallella delblock.

Ett mindre givande sätt att tolka trippelintegraler är som en 4-dimensionell tecknad volym. Med hjälp av Riemannsummor kan man emellertid tänka sig många olika fysikaliska tolkningar, till exempel som massan av en kropp D med variabel densitet $f(x,y,z)$. I allmänhet kan man, genom att applicera Fubinis Sats, beräkna en trippelintegral över ett axelparallellt rätblock med itererad integration enligt:

$$\iiint_D F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \int_c^d \int_e^f F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \tag{2.1}$$

Det finns flera metoder för att beräkna en trippelintegral. En metod är variabelbyten. Formeln för variabelsubstitution i tre dimensioner är:

$$\iiint_D F(\boldsymbol{x})\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iiint_E f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}))\, |\mathcal{J}(\boldsymbol{u})|\, du_1\, du_2\, du_3 \tag{2.2}$$

där

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) = (g_1(\boldsymbol{u}),g_2(\boldsymbol{u}),g_3(\boldsymbol{u})), \quad \mathcal{J}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial(g_1,g_2,g_3)}{\partial(u_1,u_2,u_3)},$$

D är ett område i $x_1x_2x_3$-rummet och E området i $u_1u_2u_3$-rummet så att $D = g(E)$.

Även metoden med nivåkurvor för dubbelintegraler går att göra om till en metod med integration över nivåytor för trippelintegraler. Då får man följande formel:

$$\iiint_D h(g(x,y,z))\, dx\, dy\, dz = \int_a^b h(u)V'(u)\, du \tag{2.3}$$

där $V(u)$ är volymen av området $G_u = \{(x,y,z)\,;\,(x,y,z) \in D \,\text{och}\, g(x,y,z) \leq u\}$

3 Multipelintegraler

För integraler i $\mathbb{R}^n$ med $n > 3$ använder man beteckningen

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots ,x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_D f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \tag{3.1}$$

Som man förstår saknar dessa integralerna geometrisk tolkning, men de kan fortfarande uppfattas som gränsvärden av Riemannsummor. För att beräkna multipelintegraler i dimension högre än tre använder man samma metoder som för trippelintegraler. Alltså kan man använda sig av itererad integration, variabelbyten och integration via nivåhyperytor.

4 Volymberäkningar och tillämpningar

4.1 Volymberäkningar

Det finns två sätt att beräkna volymen för ett tredimensionellt objekt. Som vi redan känner till innebär dubbelintegraler ett mätetal av volymen under funktionsytan $z = f(x,y)$. Det finns emellertid tillfällen då detta tillvägagångssätt blir krångligt att använda, t.ex. då man vill beräkna volymen av en sfär. Vi använder oss av specialfallet då $f(x,y,z) \equiv 1$. För ett område $D \subseteq \mathbb{R}^3$ gäller då

$$\mathrm{vol}(D) = \iiint_D dx\, dy\, dz \tag{4.1}$$

4.2 Koordinatsystem

Vi har kännedom om hur byten av koordinatsystem kan vara mycket behjälpliga i dubbelintegraler, till exempel byten från det Cartesiska till det Polära koordinatsystemet. Man kan lätt inse att byten av koordinatsystem även kan vara användbart för trippelintegraler.

4.2.1 Cylindriska koordinater

Låt $(x,y,z) \to (r,\theta,z)$. Vi får då:

$$dx\, dy\, dz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| dr\, d\theta\, dz = r\, dr\, d\theta\, dz \tag{4.2}$$

och

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \tag{4.3}$$

4.2.2 Sfäriska koordinater

Låt $(x,y,z) \to (\rho,\theta,\varphi)$. Vi får då:

$$dx\, dy\, dz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| d\rho\, d\theta\, d\varphi = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi \tag{4.4}$$

och

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \tag{4.5}$$

4.3 Mekaniska tillämpningar

4.3.1 Massa

Antag att vi har ett föremål med varierande densitet $\rho(x,y,z)$ över D. En infinitesimal kub har massan $dm = \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$. Vi kan alltså integrera över hela D för att få den totala massan. Vi får

$$m = \iiint_D \rho(x,y,z)\, dV = \iiint_D \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \tag{4.6}$$

4.3.2 Masscentrum

Antag att vi likt ovan har en kropp över ett område D med densitet $\rho(x,y,z)$. Kroppen masscentrum kan beskrivas av $\bar{m} = (m_x,m_y,m_z)$. För att beräkna m_x beräknar man en viktad mass-integral så att massan på ett stort avstånd från origo i x-led ger ett stort utslag i beräkningen och massan på ett litet avstånd från origo i x-led ger ett litet utslag i beräkningen, se nedan. Detta divideras sedan med den totala massan för att få fram ett medelvärde.

$$m_x = \frac{\iiint_D x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz} \tag{4.7}$$

På samma sätt beräknas m_y och m_z

$$m_y = \frac{\iiint_D y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz} \tag{4.8}$$

$$m_z = \frac{\iiint_D z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz} \tag{4.9}$$

4.4 N-dimensionella volymer

För en kropp av dimension n beräknas volymen enligt:

$$\mathrm{vol}(D) = \int \cdots \int_D dx_1 \cdots dx_n \tag{4.10}$$

Vi betraktar volymen av ett enhetsklot B_n av dimension n dvs.

$$B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\} \tag{4.11}$$

Sats 4.1. *Låt $\mu_n = \mathrm{vol}(B_n)$. Då gäller:*

$$\mu_1 = 2, \quad \mu_2 = \pi, \quad \mu_n = \frac{2\pi}{n}\mu_{n-2} \ \forall n \leq 3$$

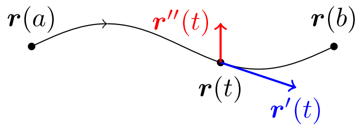
5 Kurvor

Definition 5.1. Låt $n \in \mathbb{N}$. En *parametriserad orienterad kurva* i $\mathbb{R}^n$ är en kontinuerlig funktion $\boldsymbol{r} : I \to \mathbb{R}^n$ där $I = [a,b]$ är ett slutet intervall i $\mathbb{R}$.

Det gäller att $t \mapsto \boldsymbol{r}(t)$, där t kallas *parameter*. Intervallets ändpunkter ger kurvan en *startpunkt* $\boldsymbol{r}(a)$ och *slutpunkt* $\boldsymbol{r}(b)$, och därmed en naturlig orientering. En möjlig fysikalisk tolkning är att t representerar tiden under ett förlopp då en partikel rör sig längs en bana från $\boldsymbol{r}(a)$ till $\boldsymbol{r}(b)$, och $\boldsymbol{r}(t)$ är dess momentana läge.

Notera att parametriseringen inte är unik för en given bild av en kurva. Två olika partiklar skulle kunna följa samma bana, men med olika fart. I bland är parametriseringen oväsentlig, och man tillåter sig att med ”(orienterad) kurva” syfta på en godtycklig parametrisering som ger den aktuella bilden. Vanlig beteckning för kurvor i detta fall är γ.

Definition 5.2. Låt $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ vara en C^1-kurva. Låt $t \in [a,b]$. Då är
$\boldsymbol{r}'(t)$ = hastigheten vid tid t (en tangentvektor i kurvans positiva riktning),
$\|\boldsymbol{r}'(t)\|$ = farten vid tid t,
$\boldsymbol{r}''(t)$ = accelerationen vid tid t.



Figur 1: Exempel på kurva

Kurvans längd ges av integralen

$$\int_a^b ds := \int_a^b \|\boldsymbol{r}'(t)\|\, dt \tag{5.1}$$

där ds är längdelementet längs kurvan. Längdbegreppet är väldefinierat eftersom värdet av integralen (5.1) är oberoende av parametriseringen, dvs. samma bild har samma längd (visas m.h.a. kedjeregeln). Specialfallet om kurvan är en funktionskurva $y = f(x)$, dvs. $\boldsymbol{r}(t) = (t, f(t))$ för någon $f \in C^1$ ger kurvlängden

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt \tag{5.2}$$

5.1 Kurvintegraler

Definition 5.3. Låt $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ vara en C^1-kurva, och låt $\rho : D \to \mathbb{R}$ vara en C^0-funktion där $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Då kallas

$$\int_a^b \rho(\boldsymbol{r}(t)) \bullet \|\boldsymbol{r}'(t)\|\, dt \tag{5.3}$$

för *kurvintegralen* av (skalär)fältet ρ längs kurvan $\boldsymbol{r}$.

Definition 5.4. Låt $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ vara en C^1-kurva, och låt $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ett C^0-vektorfält. Då kallas

$$\int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \bullet d\boldsymbol{r} := \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \bullet \boldsymbol{r}'(t)\, dt \tag{5.4}$$

för *kurvintegralen* av (vektor)fältet $\boldsymbol{F}$ längs kurvan $\boldsymbol{r}$.

En fysikalisk tolkning av detta är att $\boldsymbol{F}$ är ett kraftfält och integralen är en s.k. arbetsintegral, dvs. det arbete som fältet uträttar när en partikel förflyttas längs banan.

5.2 Derivering av produkter av kurvor

Proposition 5.5. *Låt $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)$ vara C^1-kurvor i $\mathbb{R}^n$. Då gäller*

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{u}(t) \bullet \boldsymbol{v}(t)\right) = \boldsymbol{u}'(t) \bullet \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \bullet \boldsymbol{v}'(t) \tag{5.5}$$

Proposition 5.6. *Låt $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)$ vara C^1-kurvor i $\mathbb{R}^3$. Då gäller*

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t)\right) = \boldsymbol{u}'(t) \times \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}'(t) \tag{5.6}$$

Dessa formler har direkta fysikaliska tillämpningar. Vi betraktar en partikel som faller fritt i kraftfältet $\boldsymbol{F}$. Det gäller enligt Newton II att

$$\boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{r}'(t)) = m\boldsymbol{r}''(t) \tag{5.7}$$

Proposition 5.7. *Utfört arbete motsvarar ändringen i kinetisk energi.*

Bevis. Om vi beräknar en arbetsintegral enligt (5.4) fås

$$\begin{aligned} W &= m\int_a^b \boldsymbol{r}''(t) \bullet \boldsymbol{r}'(t)\,dt \overset{(5.5)}{=} \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}'(t) \bullet \boldsymbol{r}'(t)\right)dt = \\ &= \frac{m}{2}\left(\left\|\boldsymbol{r}'(b)\right\|^2 - \left\|\boldsymbol{r}'(a)\right\|^2\right) = \Delta K \end{aligned} \tag{5.8}$$

□

Vi betraktar i stället en partikel som utför centralrörelse. Låt $\boldsymbol{r}(t)$ beskriva partikelns ortsvektor m.a.p. ett givet origo O. Per definition av centralrörelse är då $\boldsymbol{r}''(t)$ alltid riktad mot O (ekivalent med att den resulterande kraften på partikeln alltid är riktad mot O).

Proposition 5.8. *Om en partikel utför centralrörelse så är dess rörelsemängdsmoment $\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{r}(t) \times m\boldsymbol{r}'(t)$ konstant.*

Bevis.

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}(t) \times m\boldsymbol{r}'(t)\right) \overset{(5.6)}{=} m(\underbrace{\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}'(t)}_{=\,0} + \underbrace{\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}''(t)}_{\text{anti-}/\!/ \implies 0}) = 0 \tag{5.9}$$

□

Detta är Keplers andra lag: ”linjen mellan en planet och solen sveper alltid över en lika stor area på samma tid”.

6 Parametrisering av ytor

Låt $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s,t)$ vara parametriseringen av en yta Y i $\mathbb{R}^3$ där $D \subseteq \mathbb{R}^2, (s,t) \in D$. Arean till ytan Y kan då approximeras m.h.a. $\boldsymbol{r_s'}$ och $\boldsymbol{r_t'}$ då dessa spänner ytans tangentplan i punkten (s,t). Genom att skapa ett approximativt parallellogram i tangentplanet med kanter i koordinaterna $\boldsymbol{r}(s,t), \boldsymbol{r}(s+\Delta s,t), \boldsymbol{r}(s+\Delta s, t+\Delta t)$ och $\boldsymbol{r}(s, t+\Delta t)$ har vi areaapproximationen

$$\Delta A = \left\|(\boldsymbol{r_s'}\Delta s) \times (\boldsymbol{r_t'}\Delta t)\right\| = \left\|(\boldsymbol{r_s'}) \times (\boldsymbol{r_t'})\right\| \Delta s \Delta t \tag{6.1}$$

Om vi låter Δs och Δt gå mot 0 får vi det infinitesimala areaelementet

$$dS = \left\|(\boldsymbol{r_s'}\,ds) \times (\boldsymbol{r_t'}\,dt)\right\| = \left\|(\boldsymbol{r_s'}) \times (\boldsymbol{r_t'})\right\| ds\,dt \tag{6.2}$$

detta medför att

$$\text{Area}(Y) = \iint_D \left\|(\boldsymbol{r}'_{\boldsymbol{s}}) \times (\boldsymbol{r}'_{\boldsymbol{t}})\right\| \, ds \, dt \tag{6.3}$$

Detta kan skrivas som

$$\text{Area}(Y) = \iint_Y dS \tag{6.4}$$

6.1 Ytintegral för skalärvärda funktioner

Låt

$$\boldsymbol{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \tag{6.5}$$

vara en C^1-yta och

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \tag{6.6}$$

vara en C^0-funktion. Då makear

$$\iint_D \rho(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \left\|\boldsymbol{r}'_{\boldsymbol{s}} \times \boldsymbol{r}'_{\boldsymbol{t}}\right\| \, ds \, dt \tag{6.7}$$

sense och beskriver massan av en tunn yta med varierande densitet $\rho(x,y,z)$.

6.2 Ytintegral för vektorfält

Flödesintegralen:

$$\iint_Y \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s,t)) \bullet \hat{\boldsymbol{N}} \, dS \tag{6.8}$$

där $\boldsymbol{F}$ är vektorfältet, $\boldsymbol{r}$ är ytan, $\hat{\boldsymbol{N}}$ en enhetsnormal till ytan i punkten $\boldsymbol{r}(s,t)$ och dS är ytareaelementet.