Föreläsningssammanfattningar flervariabelsanalys

Hannes Borell, Johan Bruhn, Victor Brun,
Lukas Johansson, Johannes Hjalmarsson, Samuel Ärlig

10 mars 2019

1 Integration över allmänna områden i $\mathbb{R}^2$

DEFINITION: Låt D vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^2$ och $f : D \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. f sägs då vara integrerbar om det, för någon axelparallell rektangel Δ av vilken D är en delmängd, gäller att funktionen $f_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är integrerbar över Δ, där:

$$f_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{då}(x,y) \in D \\ 0, & \text{då}, (x,y) \notin D. \end{cases} \tag{1}$$

Om så föreligger definierar vi enligt nedan:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy := \int\int_\Delta f_D(x,y)dxdy \tag{2}$$

Vidare gäller för en funktion som är integrerbar att D inte skall ha en nollskild area. Den formella definitionen av detta följer enligt nedan.

DEFINITION:

1. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Där randen ∂D till D ges av $\partial D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{varje omgivning till } \boldsymbol{x} \text{ innehåller punkter från både } D \text{ och } D^C\}$
2. Låt $N \subseteq \mathbb{R}^2$. N kallas då för en nollmängd om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett ändligt antal axelparallella rektanglar $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ sådana att:
   (a) $\bigcup_{i=0}^{n} \Delta_i \supseteq N$

(b) $\sum_{i=1}^{n} \text{area}(\Delta_i) < \epsilon$

3. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara begränsad. D sägs då vara kvardrerbar om ∂D är en nollmängd

SATS:

a Om D är en kvadrerbar, sluten och begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$ och $f : D \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion så är f integrerbar över D.

b Om $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, där $\alpha, \beta \in C^0$ och $f : D \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig, då är:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \tag{3}$$

2 Trippelintegraler

2.1 Beräkna massa

Vi kan anta att funktionen $\rho(x,y,z)$ mäter den varierande densiteten hos en kropp D. Vi vet att massan ges av $m = \rho V$ när densiteten ρ är konstant. Med en tillräckligt liten volym dV kan vi tänka oss att ρ är nästintill konstant, och att den lilla volymens massa är:

$$dm = \rho(x,y,z)\, dV = \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \tag{4}$$

Kroppens totala massa får vi genom att ställa upp och beräkna trippelintegralen:

$$m = \iiint_D dm = \iiint_D \rho(x,y,z)\, dV = \iiint_D \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \tag{5}$$

2.2 Beräkna volym

Specialfallet $\rho(x,y,z) = 1$ kan utnyttjas då vi istället vill beräkna en kropps volym. Den konstanta densiteten 1 ger att massan måste vara lika med volymen.

$$V(D) = \iiint_D 1\, dx\, dy\, dz \tag{6}$$

2.3 Beräkna masscentrum

Trippelintegralen kan även tillämpas när vi vill beräkna masscentrum.
$\mathbf{m} = (m_x,\, m_y,\, m_z)$ där:

$$m_x = \frac{\iiint_D x\rho\, dx\, dy\, dz}{\iiint_D \rho\, dx\, dy\, dz}, \quad m_y = \frac{\iiint_D y\rho\, dx\, dy\, dz}{\iiint_D \rho\, dx\, dy\, dz}, \quad m_z = \frac{\iiint_D z\rho\, dx\, dy\, dz}{\iiint_D \rho\, dx\, dy\, dz} \tag{7}$$

3 n-dimensionella integraler

Volymer beter sig tämligen likt oavsett vilken dimension det rör sig om. Det gäller för godtycklig domän D och heltal n att:

$$\text{Om } D \subseteq \mathbb{R}^n \text{ så är } \operatorname{vol}(D) = \int \cdots \int_D dx_1 \cdots dx_n. \tag{8}$$

Ett givet exempel på en sådan integral är volymen av det n-dimensionella enhetsklotet, dvs den domän B_n som definieras som:

$$B_n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}. \tag{9}$$

Givet detta B_n fås följande sats:
SATS: Antag att $\mu_n = \operatorname{vol}(B_n)$, då gäller:

$$\mu_1 = 2,\ \mu_2 = \pi,\ \mu_n = \frac{2\pi}{n}\mu_{n-2}\ \forall n \geq 3 \tag{10}$$

BEVIS: Definitionen av B_n kan skrivas om som

$$B_n = \{(x_1,x_2,...,x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\} = \{(x_1,x_2,...,x_n) \mid x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2\} \tag{11}$$

Med denna definition fås då att

$$\operatorname{vol}(B_n) = \int \cdots \int_{B_n} dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_{B_{n-2}} dx1 \cdots dx_{n-2} \iint_C dx_{n-1} dx_n, \tag{12}$$

där C är den cirkelskiva som definieras av $x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2$. Då en cirkelskivas area kan tecknas πr^2 kan integralen skrivas om som

$$\int \cdots \int_{B_{n-2}} \pi \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2\right) dx_1 \cdots dx_{n-2}. \tag{13}$$

Låt nu $g(x_1,\cdots,x_{n-2}) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n-2} x_i^2}$ och $h(u) = 1 - u^2$

$$\begin{aligned} &\implies B_{n-2} = \{(x_1,x_2,...,x_{n-2}) \mid 0 \leq g(x_1,\cdots,x_{n-2} \leq 1\} \\ &\implies \mu_n = \pi \int_0^1 h(u)V'(u)\,du, \end{aligned} \tag{14}$$

där $V(u) = \mathrm{vol}(B^u_{n_2}) = \mu_{n-2}u^{n-2}$, alltså volymen av det $(n-2)$-dimensionella klotet med radie u. Detta ger:

$$\begin{aligned} \implies \mu_n &= \pi \int_0^1 (1-u^2)(n-2)\,\mu_{n-2}\,u^{n-3}\,du \\ &= (n-2)\,\pi\,\mu_{n-2} \int_0^1 (1-u^2)\,u^{n-3}\,du \\ &= (n-2)\,\pi\,\mu_{n-2}\,\frac{2}{n(n-2)} \\ &= \frac{2\pi}{n}\,\mu_{n-2} \quad \square \end{aligned} \tag{15}$$

Anmärkning: Man kan vidare visa att ytarea$(S_n^r) = n\,\mu_n\,r^{n-1}$ och att ytarea$(S_n^1) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$, där S_n^r är den n-dimensionella sfären med radien r och Γ är gammafunktionen.j

4 Kurvor

DEFINITION: En parameteriserad orienterad kurva i $\mathbb{R}^n$ är en kontinuerlig funktion $\mathbf{r}(t) : I \to \mathbb{R}^n$, där $I = [a,b]$ är ett slutet intervall i $\mathbb{R}$ och n är ett naturligt tal.

Parameterisering av en kurva innebär att $\mathbf{r}(t)$ är en avbildning av en parameter t, alltså $t \mapsto \mathbf{r}(t)$, där t antar alla värden i I. $\mathbf{r}(a)$ kallas kurvans startpunkt och $\mathbf{r}(b)$ kallas kurvans slutpunkt.

I många fall är vi intresserade av kurvans orientering men inte dess parameterisering. I dessa fall brukar kurvan betecknas med γ. Samma kurva med motriktad orientering betecknas $-\gamma$.

En fysikalisk tolkning av kurvor är att $\mathbf{r}$ beskriver banan från $\mathbf{r}(a)$ till $\mathbf{r}(b)$ för en partikel, där t är tiden och $\mathbf{r}(t)$ är positionen vid tiden t. Därav följer att $\mathbf{r}'(t)$ beskriver partikelns hastighet, $\|\mathbf{r}'(t)\|$ partikels fart och $\mathbf{r}''(t)$ partikelns acceleration vid tiden t.

Längden l av en kurva beräknas genom att integrera farten av en partikel som rör sig längs kurvan över tiden. Antag att $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ och därmed att $\mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$. Då ges farten vid tiden t av

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i'(t))^2}, \tag{16}$$

och integration med avseende på t ger att

$$l = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i'(t))^2} \quad dt. \tag{17}$$

I fallet då $\mathbf{r}(t) : I \to \mathbb{R}^2$ och $y = f(x)$, d.v.s. $t \mapsto (t, f(t))$, beräknas kurvlängden enligt

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} \quad dt. \tag{18}$$

Samma kurva kan parameteriseras med olika parametrar men detta har ingen påverkan på kurvans längd. Den fysikaliska tolkningen av detta är att en partikel rör sig längs samma kurva men med en annan hastighet och över ett annat tidsintervall.

PROPOSITION:

1. Låt $\mathbf{u}(t)$ och $\mathbf{v}(t)$ vara C^1 kurvor i $\mathbb{R}^n$. Då gäller $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = (\mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{u}(t))$
2. Låt nu istället $\mathbf{u}(t)$ och $\mathbf{v}(t)$ vara C^1 kurvor i $\mathbb{R}^3$. Då gäller $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = (\mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}'(t) \times \mathbf{u}(t))$

En fysikalisk tillämpning av proposition 1 är arbetsintegraler. Låt $\mathbf{r}$ vara en C^1 kurva $[a,b] \to \mathbb{R}^3$ och $\mathbf{F}$ vara ett C^1 vektorfält $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Om $\mathbf{F}$ är ett kraftfält får vi arbetet $\mathbf{F}$ uträttar för en partikel som flyttas längs $\mathbf{r}$ genom

$$\int_b^a \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = m \int_b^a \mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \tag{19}$$

Genom tillämpning av proposition 1 får vi

$$\frac{m}{2} \int_b^a \frac{d}{dt}(\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)) dt = \frac{m}{2}((\mathbf{r}'(a)^2) - (\mathbf{r}'(b)^2)), \tag{20}$$

vilket är partikelns förändring i kinetisk energi.

Låt $\mathbf{r}(t)$ beskriva en partikels ortsvektor med avseende på O. Partikeln utför en centralrörelse om $\mathbf{r}''(t)$ alltid är riktad mot O. $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$ kallas partikelns vinkelmomentum. Vi kan med proposition 2 bevisa att partikelns vinkelmomentum är konstant. Produkterna av derivatan blir nämligen

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)) = \mathbf{r}(t)' \times \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t) = 0 \tag{21}$$

ty $\mathbf{r}(t)$ och $\mathbf{r}''(t)$ är antiparalella. Detta är också en av Keplers lagar.

5 Ytor

DEFINITION: Låt D vara en delmängd till $\mathbb{R}^2$ och $\mathbf{r}$ en kontinuerlig funktionen som går från $D \to \mathbb{R}^n$ där $n \geq 2$. Då $\mathbf{r}$ är en avbildning av två parametrar (s,t) som tillhör D kallas $\mathbf{r}(s,t)$ en parameteriserad yta.

5.1 Ytors area

För att kunna beräkna ytors area behövs först en formel för ett infinitesimalt areaelement i $\mathbb{R}^3$.

Givet den parametriserade ytan $\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ där $\mathbf{r}$ är minst C^1 kan de partiella derivatorna $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = (\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s})$ och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = (\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t})$ beräknas. De partiella derivatorna spänner upp tangentplanet till ytan i en given punkt. Den infinitesimala arean dS är lika med arean av det parallellogram som spännds upp av vektorerna $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}ds$ och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}dt$. dS ges då av

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}ds \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}dt \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| dsdt \tag{22}$$

Ytans totala area kan nu beräknas med hjälp av dubbelintegralen

$$\iint\limits_D dS = \iint\limits_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| dsdt \tag{23}$$

givet att D är ett begränsat område i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ är en parametriserad C^1 yta.

Notera: Det formella kravet för en parametriserad C^1 yta är att $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}$ och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ aldrig ska vara parallella.

6 Kurv- och ytintegraler för skalärvärda funktioner

Givet C^1-kurvan $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ och C^0 funktionen av n-variabler $\rho(x_1,...,x_n)$ kan integralen

$$\int_a^b \rho(\mathbf{x}(t)) \, \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \tag{24}$$

tolkas som massan av en tunn sträng med densitet ρ.

Givet C^1-ytan $\mathbf{r} : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ och C^0 funktionen av 3 variabler $\rho(x_1,x_2,x_3)$ kan dubbelintegralen

$$\iint\limits_D \rho(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| dsdt \tag{25}$$

tolkas som massan av en tunn yta med densitet ρ.