Kurvintegraler i planet och i rummet

Jibbril Ndaw Berbres, jibbril@student.chalmers.se
Elin Dufvenius Esping, delin@student.chalmers.se
Alexander Körner, kornera@student.chalmers.se
Tore Levenstam, ltore@student.chalmers.se
Elmer LingeståI, elmerl@student.chalmers.se
Samuel Sandelius, samsan@student.chalmers.se

22/3 - 2019

Sammanfattning

Under läsvecka 6 har fokus legat på kurvintegraler i planet och i rummet. Först behandlades grundläggande begrepp och definitioner kring vad en kurvintegral är. Efter detta förklarades Greens sats och potentialer vilket är två användbara appliceringar av teorin kring kurvintegraler. Slutligen generaliserades delar av dessa till att även gälla beräkningar i rummet vilket exemplifierades genom ett antal fysikaliska tillämpningar.

1 Kurvintegraler

Vi tänker oss en kurva γ i planet, med startpunkt i a och slutpunkt i b. En partikel rör sig över kurvan γ samtidigt som den påverkas av ett kraftfält $\boldsymbol{F}$, som beror av $\boldsymbol{r}(t)$, där $\boldsymbol{r}$ beskriver partikelns läge med avseende på parametern t, $\alpha \leq t \leq \beta$ så att $r(\alpha) = a$ och $r(\beta) = b$.

Det arbete som uträttas av $\boldsymbol{F}$ på partikeln genom färden över γ under tidperioden dt är

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt.$$

Det totala utfärdade arbetet över hela γ ges av integralen

$$\int_{\alpha}^{\beta} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt.$$

Detta kommer vi att använda för att formulera defintionen av kurvintegralen.

Definition 1.1. *Låt*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (P(\boldsymbol{r}), Q(\boldsymbol{r})) = (P(x,y), Q(x,y))$$

vara ett kontinuerligt vektorfält definierad i en öppen mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Om γ är en orienterad C^1-kurva i D med parameterframställningen

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)), \alpha \leq t \leq \beta$$

så kallar vi

$$\int_{\alpha}^{\beta} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt \tag{1}$$

*för **kurvintegralen** av $\boldsymbol{F}$ över γ.*

Vi vet från fysiken att ett arbete utfört på en partikel längs en bana endast beror på kraften i färdriktningen och hur långt partikeln färdas, alltså oberoende av hastigheten partikeln färdas. Med kurvintegralen som tolkning av detta vill vi påstå att detsamma gäller för kurvintegralen.

Vi kan således bevisa att kurvintegralen är oberoende av valet av parameter för den orienterade kurvan γ.

Bevis. En parameter t och en alternativ parameter u har sambandet $t = \varphi(u)$, där φ är en strängt växande C^1-funktion på ett intervall $[a, b]$ med $\varphi(a) = \alpha$ och $\varphi(b) = \beta$. Vi kan då framställa γ i parametern u som $\boldsymbol{r}(\varphi(u))$, $\alpha \leq u \leq \beta$. Beräkningen av $\int_{\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ i parametern u blir

$$\int_{u=a}^{b} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\varphi(u))) \cdot \frac{d}{du}\boldsymbol{r}(\varphi(u))du = \int_{u=a}^{b} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\varphi(u))) \cdot \boldsymbol{r}'(\varphi(u))\varphi'(u)du =$$

$$= \begin{bmatrix} \varphi(u) = t \\ \varphi'(u)du = dt \end{bmatrix} = \int_{t=\alpha}^{\beta} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt,$$

vilket ser ger samma resultat som (1). □

2 Greens sats

Greens sats är en användbar metod för att omvandla en kurvintegral till en (förhoppningsvis) enklare dubbelintegral. För att kunna formulera satsen behöver man definiera tre begrepp rörande kurvintegraler.

Definition 2.1. *Låt $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ vara en parametrisering i planet. γ kallas sluten om*

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

Definition 2.2. *Låt $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ vara en parametrisering i planet. γ kallas enkel om*

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2, \forall t_1, t_2 \in [a, b)$$

Definition 2.3. *Låt $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ vara en sluten och enkel kurva i planet. γ kallas positivt orienterad om den insida som γ skiljer av från resten av planet ligger till vänster när man rör sig i kurvans färdriktning.*

Med hjälp av dessa definitioner kan man nu formulera Greens sats.

Sats 2.1. *Låt P och Q vara två C^1-funktioner definierade i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Låt D vara ett kompakt delområde till Ω med en rand ∂D som utgörs av en eller flera styckvis C^1-kurvor. Om ∂D är sluten, enkel och positivt orienterad gäller att*

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Bevis. För att genomföra beviset måste man även kunna dela upp området D i ändligt många områden, E, med hjälp av linjer parallella med y-axeln, där E består av

$$E = \{(x, y); \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), a \leq x \leq b\} \tag{2}$$

där γ är den undre kurvan av E och σ är den övre kurvan. Analogt måste D kunna delas upp i ändligt många områden med linjer parallella med x-axeln. Vi kommer endast bevisa för fallet i y-led eftersom x fallet följer analogt. Först visar vi att

$$\int_{\partial E} Pdx = \int \int_E -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy \tag{3}$$

Intererad integration av högerledet ger

$$\begin{aligned}
\int\int_E -\frac{\partial P}{\partial y} &= \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)dx \\
&= \int_{x=a}^{b}\Big[-P(x,y)\Big]_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)}dx \\
&= \int_a^b P(x,\varphi(x))dx - \int_a^b P(x,\psi(x))dx
\end{aligned} \tag{4}$$

Kurvan γ kan parameteriseras med

$$\boldsymbol{r}(x) = (x, \varphi(x)), \quad a \leq x \leq b$$

Den första integralen i högerledet i (3) blir därför

$$\int_\gamma Pdx + 0dy = \int_\gamma Pdx.$$

analogt blir den andra termen

$$-\int_a^b P(x,\psi(x))dx = \int_\sigma Pdx$$

(Notera att orienteringen av σ är motsatt till γ, vilket eliminerar minus tecknet). Eftersom linjerna som delar upp E är paralllella med y-axeln kommer de inte ge något bidrag till Pdx. ∂E får alltså endast bidrag av γ och σ, vilket ger

$$\int\int_E -\frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_{\partial E} Pdx$$

Genom addition av alla områdena E blir därför

$$\int\int_D -\frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_{\partial E} Pdx \tag{5}$$

Analogt ger indelning av D med hjälp av linjer parallella med x-axeln

$$\int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int_{\partial D} Qdy \tag{6}$$

Addition av (4) och (5) ger

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy \tag{7}$$

och beviset är klart.

$\square$

3 Potentialfält

Man brukar säga att en kurvintegral

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_\gamma P dx + Q dy$$

av ett givet vektorfält $\boldsymbol{F} = (P, Q)$, definerat i en öppen mängd Ω, är *oberoende av vägen i Ω* om resultatet av integrationen för varje kurva γ i Ω bara beror av dess begynnelse- och startpunkt, inte alls på kurvans förlopp i övrigt. Ett ekvivalent villkor är att *kurvintegralen längs varje sluten kurva i Ω är noll.* För att karakterisera sådanna fält för vilka kurvintegralen är oberoende av vägen, introduceras följande definition.

Definition 3.1. *Vektorfältet $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ kallas ett **potentialfält** eller ett **konservativt fält** i det öppna området Ω om det finns en C^1-funktion ϕ:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i Ω sådan att*

$$\boldsymbol{F} = \nabla\phi.$$

*Då kallas funktionen ϕ för en **potential** till $\boldsymbol{F}$.*

Sats 3.1. *Låt $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ vara ett potentialfält med potentialen ϕ i det öppna området Ω. För varje kurva γ i Ω gäller då att*

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \phi(\boldsymbol{b}) - \phi(\boldsymbol{a}),$$

där $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ är begynnelse- respektive slutpunkt för γ. Speciellt är kurvintegralen $\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \phi(\boldsymbol{b}) - \phi(\boldsymbol{a})$ oberoende av vägen.

En fysikalisk tolkning av satsen är att för ett konservativt fält gäller att utfört arbete är lika med förändring i potentiel energi. Och en matematisk tolkning blir en generalisering av kalkylens fundamentalsats.

Vilkoret: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Under förutsättningarna för Greens sats noterar vi fallet då

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Vilket implicerat att högerledet i Greens sats blir lika med noll för alla val av D där $\boldsymbol{F} \in C^1$, se sats 2.1 för förtydliganden. Det implicerar i sin tur att vänsterledet i satsen också blir lika med noll för alla val av D.

$$\Rightarrow \oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0,$$

för varje sluten och enkel γ så länge $\boldsymbol{F}$ är C^1 i området som innesluts av γ. Det vill säga, kraftfältet $\boldsymbol{F}$ utför inget arbete på en partikel som rör sig i en sluten bana.

Definition 3.2. *Låt $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ vara ett C^1- fält i det öppna området $\mathit{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$. $\boldsymbol{F}$ sägs då vara **virvelfritt** om,*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

4 Virvelfria vektorfält

Från kunskapen om potentialfält/konservativa vektorfält, vet vi att dessa uppfyller kravet:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \text{ ty}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\phi = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\phi,$$

om $\phi \in C^2$ för alla x och y inom ett öppet område $\mathit{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$. Vilket också är kravet på ett virvelfritt vektorfält. Frågan är då om detta implicerar att $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ är ett potentialfält?

Vi undersöker detta genom att ta en enkel, sluten C^1 kurva γ och antar att $\boldsymbol{F}$ är virvelfritt på dess insida. Vi tillämpar Greens sats.

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int \int_{int(\gamma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

Vi ser att det ända som kan gå fel här är då $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ inte är definierat för alla x,y på insidan av γ.

Alltså behövs ett starkare villkor utöver att $\boldsymbol{F}$ är virvelfritt, för att kunna dra en slutsats huruvida $\boldsymbol{F}$ är ett potentialfält. Denna sats lyder som följande:

Sats 4.1. *Om $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ uppfyller villkoret*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, (x, y) \in \Omega.$$

Och Ω är en enkelt sammanhängande öppen del av planet så har $\boldsymbol{F}$ en potential i Ω.

Där en allmän definition för en enkelt sammanhängande mängd är:

Definition 4.1. *$\mathit{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ sägs vara enkelt sammanhängande om Ω är bågvis sammanhängande och varje enkel sluten kurva i Ω kan kontinuerligt kontrakteras till en punkt utan att lämna Ω.*

5 Fysikaliska Tillämpningar

Vektorfält och specifikt potentialfält kan användas för att beskriva fysikaliska fenomen. Newtons gravitationslag säger att två punktmassor med massorna M

och m, där M ligger i origo och vägen till m är vektorn $\boldsymbol{r}$. Då kan vi beskriva kraftfältet som gravitationen från M avger på m:

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{||\boldsymbol{r}||^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

där $\boldsymbol{F}$ är ett potentialfält då $\boldsymbol{F} = \nabla\phi$ där

$$\phi(x, y, z) = \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

där G är den universella gravitationskonstanten.

Vi har även Coulombs lag som kan beskrivas med ett elektriskt fält $\boldsymbol{E}$ som avges av en laddning Q, som liknar Newtons gravitationslag:

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon||\boldsymbol{r}||^2}\hat{\boldsymbol{r}} = \nabla V$$

där ϵ är en universell konstant. $\boldsymbol{E}$ är även ett potentialfält till funktionen V som beskriver spänningen (även kallat potentialen).

Kraften på en annan laddning q som påverkas av $\boldsymbol{E}$ skrivs som

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon||\boldsymbol{r}||^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Både Newtons gravitationslag och Coulombs lag har en så kallad singularitet i origo då $||\boldsymbol{r}|| = 0$.

6 Divergens och Rotation av vektorfält

För att kunna generalisera t.ex. Greens sats till högre dimensioner måste vi introducera två nya operationer: divergens och rotation (som även används för annat).

Definition 6.1. *Låt $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ vara ett C^1-vektorfält. Divergensen av $\boldsymbol{F}$ betecknas då $div(F)$ eller $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ vilket utläses som 'grad dot F'. Divergensen av $\boldsymbol{F}$ är skalärfältet som ges av*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

vilket kan ses som skalärprodukten av gradienten och $\boldsymbol{F}$, därav beteckningen 'grad dot F'.

Definition 6.2. *Låt $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ vara ett C^1-vektorfält. Rotationen av $\boldsymbol{F}$, som betecknas curl($\boldsymbol{F}$) eller $\nabla \times \boldsymbol{F}$ (utläses 'grad kryss F'), är vektorfältet som ges av*

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \quad \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right]$$

där $\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}$ är våra basvektorer.

Om vi har ett vektorfält i $\boldsymbol{R}^2$ kan vi fortfarande beräkna rotationen av vektorfältet genom att sätta $\boldsymbol{F} = (P, Q, 0)$. Då gäller

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{\boldsymbol{k}}$$

7 Stokes sats

Med hjälp av rotationen av ett vektorfält kan vi nu formulera Stokes sats.

Sats 7.1. *Stokes sats säger att om vi har ett C^1-vektorfält $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^3$, och Y är ett positivt orienterat ytstycke i Ω med en styckvis C^1 positivt orienterad rand ∂Y så gäller*

$$\oint_{\partial Y} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

Stokes sats kan ses som en mer generaliserad form av Greens sats, då den appliceras i det 3-dimensionella fallet. Mer specifikt så är Greens sats ett specialfall av Stokes sats där ytan befinner sig helt på xy-planet.

8 Flödesintegraler

Flödesintegraler, som även kan kallas ytintegraler, är integraler där vi betraktar vektorfält som fält som beskriver ett flöde. Med hjälp av flödesintegraler kan vi då beräkna hur mycket som flödar ut genom en yta, likt hur vi kan beräkna till exempel arbete med kurvintegraler.

En ytintegral ser ut på följande vis:

$$\iint_Y \boldsymbol{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

som utläses 'flödet av $\boldsymbol{F}$ ut genom Y'. Här beskriver $\boldsymbol{F}$ flödet och $\hat{\boldsymbol{N}}$ är en utåtriktad normal från ytan, och Y är en yta i $\boldsymbol{R}^3$.

Integralen kan beräknas direkt genom en parametrisering av ytan. Mer specifikt behövs en formel för $\hat{\boldsymbol{N}}dS$, och den formeln kan man utvinna genom 3 olika metoder för olika fall.

Allmänt gäller

$$Y = \{\boldsymbol{r}(s,t) | (s,t) \in D \subseteq \boldsymbol{R}^2\} \implies \hat{\boldsymbol{N}}dS = \pm \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \right) ds\, dt$$

Tecknet måste kontrolleras för att $\hat{\boldsymbol{N}}$ riktas ut från ytan.

Det första specialfallet är om Y är en funktionsyta sådant att $z = f(x,y)$ så gäller

$$\hat{\boldsymbol{N}}dS = \pm(-f_x, -f_y, 1)dx\, dy$$

Det andra specialfallet är om Y är en implicit definierad funktionsyta $F(x,y,z) = k$, där k är en konstant och $F_z \neq 0$. Då gäller

$$\hat{\boldsymbol{N}}dS = \pm \left(\frac{\nabla F}{F_z} \right) dx\, dy$$

För båda dessa specialfallen måste riktningen av $\hat{\boldsymbol{N}}$ kontrolleras likt som i det generella fallet.

8.1 Gauss divergenssats

För flödesintegraler kan vi använda Gauss divergenssats likt hur vi använder Greens sats för att skriva om kurvintegraler till en integral som är förhoppningsvis enklare att beräkna.

Sats 8.1. *Gauss divergenssats säger att om vi låter $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1-fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^3$. Om det kompakta området $K \subseteq \Omega$ har en rand ∂K (i detta fall en yta) som består av en eller flera C^1-ytor och som är orienterad med utåtriktad normal så gäller*

$$\oiint_{\partial K} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{N}} dS = \iiint_K \nabla \cdot \boldsymbol{F} d\boldsymbol{V}$$

Beviset för Gauss divergenssats följer samma idé som beviset av Greens sats, alltså genom att dela upp området.