Tavelpresentation lv6

Viktor Wiklund, Anton Rosenberg, Simon Lindén, Rickard Ström, Andre Örjas

February 2019

Innehåll

1 Kurvintegral

Låt [a,b] $\to \boldsymbol{R}^n$ vara en C^1 kurva och $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ ett integrerbart vektorfält.

$\int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)$ kallas för kurvintegral/arbetsintegral av $\boldsymbol{F}$ längs kurvan $\gamma = \{\boldsymbol{r}(t); a \leq t \leq b\}$

Kurvintegralen är väldefinierad d.v.s integralens värde är oberoende av valet av parametriseringar för kurvan.

1.1 Definitioner

Def.1 En kurva r:[a,b] $\to \boldsymbol{R}^n$ sägs vara sluten om r(a)=r(b) (dess startpunkt = dess slutpunkt)

Def.2 En kurva r:[a,b] $\to \boldsymbol{R}^n$ sägs vara enkel om , $\forall t_1, t_2 \in [a,b], r(t_1) = r(t_2) => t_1 = t_2$.

Def.3 låt γ vara en enkel, sluten kurva i $\boldsymbol{R}^2$. Den sägs då vara positivt orienterad om kurvan genomlöps moturs $\Leftrightarrow$ insidan av kurvan ligger till vänster om färdriktningen.

1.2 Greens sats

Sats: låt P och Q vara två c^1 - funktioner definierade i en öppen mängd ω i planet. Om det kompakta delområde D av ω har en positivt orienterad rand ∂D som utgörs av en eller flera styckvis $c^1 - kurvor$ så

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \tag{1}$$

<u>Bevis:</u> Antag att D kan delas upp i ändligt antal områden av typen

$$E = \{(x,y) : \varphi \leq y \leq \psi, a \leq x \leq b\}$$

och motsvarighet finns för x-axeln. vi vill då visa att för ett område E gäller

$$\int_{\partial E} Pdx = \iint_E -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy \tag{2}$$

Börja med högerledet

$$HL : \iint_E -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=\varphi(x)}^{\psi} -\frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_{x=a}^b [-P(x,y)]_\varphi^\psi dx =$$

$$\int_a^b P(x, \varphi(x))dx - \int_a^b P(x, \psi(x))dx.$$

Vi uttrycker γ(ett kurvstycke av ∂D) i parameterframställning med x som parameter och får

$$\boldsymbol{r}(x, \varphi), a \leq x \leq b$$

vilket get den första integralen i högerledet

$$\int_\gamma Pdx + 0dy = \int_\gamma Pdx$$

På samma sätt får för den högra integralen i HL (för kurvstycket σ

$$-\int_a^b P(x.\psi(x))dx = \int_\sigma Pdx$$

Alltså

$$\iint_E -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial E} Pdx$$

ty kurvintegralen längs eventuella vertikala randstycken är noll. Addera ihop resultatet för alla delområden E av D och få

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial D} Pdx$$

ty de inre vertikala linjestyckena ger inget nettobidrag, analogt fås

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

Q.E.D

1.3 Tillämpningar av Greens sats

1.3.1 Fysikalist tolkning

För ett konservativt fält gäller: utfört arbete = förändring i potential engeri.

1.3.2 Matematisk tolkning

Sorts generalisering av kalkylens fundamental sats. Mer precis: detta är KFS om n = 1 och γ är ett intervall $[a, b]$ längs x-axeln $\int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \phi(b) - \phi(a)$
Bevis :
Välj någon parametrisering för $\gamma = \{\boldsymbol{r}(t) | a \leq t \leq b\}$

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) \partial t = \int_a^b \nabla \phi(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) \partial t \xrightarrow{kedjeregeln} \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}(\phi(\boldsymbol{r}(t))) \partial t = \phi(\boldsymbol{r}(t))|_a^b = \phi(\boldsymbol{r}(b)) - \phi(\boldsymbol{r}(a))$$

Q.E.D

1.3.3 Areaberäkning

Exempel:
Beräkna arean mellan x-axeln och cykloidbågen
$x = t - sin(t)$
$y = 1 - cos(t)$
Enligt Greens formel

$$-\oint_{\gamma=\partial D} ydx = -\iint_D -\frac{\partial D}{\partial x} dxdy = \iint_D dxdy = Arean(D) \tag{3}$$

$$\oint_{\gamma=\partial D} xdy = \iint_D \frac{\partial D}{\partial y} dxdy = \iint_D dxdy = Arean(D) \tag{4}$$

$$\oint_{\gamma=\partial D} ydx + xdy = 2 \cdot Arean(D) \tag{5}$$

$\sigma_2 : \{(t, 0); 0 \leq t \leq 2\pi\}$
$-\sigma_1 : \{(t - sin(t), 1 - cos(t) 0 \leq t \leq 2\pi\}$
använd (4)

$$Arean(D) = \int_{\partial D = \sigma_1 + \sigma_2} x\partial y = \int_{\sigma_2} x\partial y + \int_{\sigma_1} x\partial y = \int_{\sigma_2} x\partial y - \int_{-\sigma_1} 0\partial x + x\partial y = -\int_0^{2\pi} (0, t - \sin t) \cdot (..., \sin t) \partial t =$$

$$\int_0^{2\pi} (t \sin t - \sin t^2) \partial t = -\int_0^{2\pi} t \cdot \sin t \partial t + \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos t}{2} \partial t = \pi - ([t \cos t]_{2\pi}^0 - \int_0^{2\pi} - \cos t \partial t) = 3\pi$$

2 Potentialer

2.1 Definition

Vektorfältet $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ kallas ett potentialfält, alternativt ett konservativt fält i det öppna området Ω om det finns en C^1-funktion ϕ sådan att

$$\boldsymbol{F} = \nabla\phi. \tag{6}$$

ϕ är då en potential till $\boldsymbol{F}$. En annan benämning för potentialen är differentialformen $P\,dx + Q\,dy$ som är exakt i området Ω då

$$d\phi = P\,dx + Q\,dy. \tag{7}$$

Med hjälp av definitionen av differentialer och partiell derivering kan vi se sambandet mellan (6) och (7):

$$P = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x}$$

$$Q = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}$$

Detta ger oss att

$$(P, Q) = \nabla\phi. \tag{8}$$

2.2 Användning av potential

Låt $\boldsymbol{F}$ vara ett konservativt vektorfält där $\boldsymbol{F} = \nabla\phi$ är definierat i domän D där γ är en positivt orienterad kurva. Om γ är sluten så är

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r} = \phi(\,\boldsymbol{b}\,) - \phi(\,\boldsymbol{a}\,) \tag{9}$$

där $\boldsymbol{a}$ är startpunkt och $\boldsymbol{b}$ är slutpunkten på kurvan γ.

Bevis: Parametrisera γ med $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)\,,\ \alpha \le t \le \beta$ så att

$$\boldsymbol{r}(\alpha) = a, \qquad\qquad \boldsymbol{r}(\beta) = b.$$

Med hjälp av kedjeregeln medför detta att

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'\,dt$$

Enligt grundantagandet är $\boldsymbol{F} = \nabla\phi$ vilket innebär att

$$\int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'\,dt = \int_a^b \nabla\phi\,(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(\phi(\boldsymbol{r}(t))\,dt$$

När vi nu integrerar funktionen får vi

$$\int_a^b \frac{d}{dt}(\phi\,(\boldsymbol{r}(t))\,dt = [\,\phi(\boldsymbol{r}(t))\,]_{t=a}^b = \phi(\boldsymbol{r}(b)) - \phi(\boldsymbol{r}(a)) = \phi(\boldsymbol{b}) - \phi(\boldsymbol{a})$$

vilket alltså visar sambandet $\int_\gamma \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r} = \phi(\,\boldsymbol{b}\,) - \phi(\,\boldsymbol{a}\,)$.

2.3 Existens av potential

Man säger att en mängd Ω är enkelt sammanhängande om

- *Omega* är bågvis sammanhängande
- Varje enkel och sluten kurva i Ω kan kontinuerligt kontraheras till en punkt utan att lämna Ω

Om vektorfältet

$$\boldsymbol{F} = (P, Q) \tag{10}$$

uppfyller villkoret

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, (x, y)\epsilon\Omega \tag{11}$$

där Ω är en enkeltsammanhängande öppen del av planet så har $\boldsymbol{F}$ en potential i Ω. Det vill säga att $\exists\phi : \nabla\phi = F$.
Bevis; (för Ω som tillhör $\boldsymbol{R}^2$)
Om $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ är ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande och öppen mängd Ω och kurvintegralen $\int_\gamma \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen medför detta att $\boldsymbol{F}$ har en potential i Ω. Detta gäller enligt sats 9.4.3 i boken. Pågrund av detta räcker det med att visa att $\int_\gamma \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen. Det vill säga att $\int_\gamma \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} = 0$ för varje sluten kurva i Ω. Vi kollar endast fallet då kurvan γ inte skär sig själv. Eftersom Ω är enkelt sammanhängande avgränsar γ ett område D som ligger helt i Ω. Vilket medför att vi kan tillämpa Greens formel, med $= \pm\gamma$ där tecknet beror på gammas orientering, vi får då följande

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} = \int_\gamma Pdx + Qdy = \pm\int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \pm\int\int_D 0dxdy = 0 \tag{12}$$

Q.E.D

3 Det av en punktladdning alstrade elektrostatiska fältet

Det konservativa elektriska fält som genereras av en punktladdning kan beskrivas analogt med det gravitationsfält som genereras av en punktmassa. Givet en punktladdning placerad i origo i ett kordinatsystem kommer det av punktladdningen genererade elektriska fältet, enligt Couloumbs lag, att ge upphov till en kraft på övriga laddade partiklar i fältet. Fältets riktning definieras som riktningen av den kraft vars verkan sker på en positiv partikel i fältet, det vill säga utåt från origo om punktladdningen är positiv och mot origo om den är negativ. Kraftens storlek är, till följd av konservation av fältets flöde, omvänt proportionell mot radien i kvadrat ty ytan av en sfär med radie, r ges av $4 \cdot \pi \cdot r^2$. Kraften är vidare även direkt proportionell mot laddningarnas storlek enligt

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{|\vec{r}|^2} \tag{13}$$

där ϵ är mediets elektriska permittivitet. Kraftverktorn ges därmed av

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot (x, y, z). \tag{14}$$

Observera att riktningens tecken ges av tecknet på produkten av de två laddningarna q_1 och q_2.

4 Flödesintegraler

Först är det motiverat att nämna några ord om begreppet orientering av yta. Låt en yta vara parametriserad av s och t enligt

$$Y : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3. \tag{15}$$

Enhetsnormalen till ytan skriver vi

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t}{|\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t|}. \tag{16}$$

Sidan ur vilken normalen utträder säges vara ytans positiva sida.

Betrakta nu för ett vektorfält, $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, nettoflödet, Φ , ut ur ytan, Y för en strömning. Vi kan då skriva

$$\Phi = \int\int_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS, \tag{17}$$

där $\mathbf{N}$ ges av (16) och areaelementet, $dS = |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| dsdt$ så att

$$\Phi = \int\int_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t) dsdy, \tag{18}$$

där D är området i parameterplanet.

4.1 Exempel på beräkning av en flödesintegral

Vi vill beräkna flödet ψ ur området

$$K : 4 _{(}\geq_{)} z _{(}\geq_{)} x^2 + y^2 \tag{19}$$

för fältet

$$\boldsymbol{u} = (x, y, 3). \tag{20}$$

***Lösning* :** Vi behöver räkna på två olika ytstycken, den platta cirkulära ovan sidan Y_1 sätt från högt upp på z-axeln samt rotationsparaboloiden Y_2. På Y_1 är den yttre normalen $\boldsymbol{N_1}$ konstant och lika med $(0, 0, 1)$. Alltså är

$$\int\int_{Y_1} \boldsymbol{u} * \boldsymbol{N} dS = \int\int_{Y_1} (x, y, 3) * (0, 0, 1) dS = \int\int_{Y_1} 3dS = 3\pi 2^2 = 12\pi. \tag{21}$$

Ytan Y_2 har parametriseringsframställningen

$$\boldsymbol{r} = (x, y, x^2 + y^2), (x, y)\epsilon D, \tag{22}$$

där D är cirkelskivan $4_{(}\geq_{)}\mathrm{x}^2 + y^2$. Ytnormalen till denna parametriseringen blir följande

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-2x, -2y, 1). \tag{23}$$

Detta är dock en inre normal till K. Pågrund av detta blir den yttre normalen alltså

$$(2x, 2y, -1). \tag{24}$$

Flödet genom Y_2 kan skrivas som

$$\int\int_{Y_2} \boldsymbol{u} * \boldsymbol{N} dS = \int\int_D (x, y, 3) * (2x, 2y, -1) dxdy = \int\int_D (2x^2 + 2y^2 - 3) dxdy. \tag{25}$$

Genom omvandling till polära koordinater får vi

$$\int\int_{Y_2} \boldsymbol{u} * \boldsymbol{N} dS = 2\pi \int_0^2 (2r^2 - 3) r dr = 4\pi. \tag{26}$$

Nettoflödet ur K blir således

$$\psi = 12\pi + 4\pi = 16\pi. \tag{27}$$