Tavelpresentation lv6

Karl Nilsson, Johan Gönczi, Gustav Burman, Kajsa Karlsson, Linnéa Ögren

2019-03-10

Institutionen för Teknisk Fysik och Matematik
Chalmers Tekniska Högskola
SE 412 96 Göteborg, Sverige

Innehåll

1 Kurvintegraler

Låt $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ vara en C^1-kurva och $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ett integrerbart vektorfält.

Kvantiteten $\int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\, dt$ kallas för kurvintegralen eller arbetsintegralen av $\boldsymbol{F}$ längs kurvan $\gamma = \{\boldsymbol{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$.

Proposition: Kurvintegralen är väldefinierad, det vill säga integralens värde är oberoende av valet av parametrisering för kurvan.

Bevis: Om $\boldsymbol{r}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ är en annan C^1-parametrisering av kurvan så finns det en växande C^1-funktion $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ så att $\boldsymbol{r}(\varphi(s)) = \boldsymbol{r}_2(s)$.

Sätt $t = \varphi(s)$

$$\int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\, dt = \int_c^d \underbrace{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\varphi(s)))}_{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_2(s))} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(\varphi(s))\varphi'(s)}_{\frac{d}{ds}\boldsymbol{r}_2(s)}\, ds \tag{1}$$

$$= \int_c^d \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_2(s)) \cdot \boldsymbol{r}_2(s)\, ds \qquad \square \tag{2}$$

Notation: Givet kurvan γ och fältet $\boldsymbol{F}$ kan vi skriva integralen ovan mer kortfattat

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{3}$$

2 Definitioner

För det konservativa kraftfältet $\boldsymbol{F} \in C^1$ gäller att $\boldsymbol{F}$ inte utför något arbete på en partikel som rör sig i en sluten bana. Arbetet som fältet utför på en partikel beror endast på start- och slutpunkt till kurvan γ.

(i): Låt $\boldsymbol{F} = (P,Q)$ vara ett C^1-fält i det öppna området $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. $\boldsymbol{F}$ sägs då vara virvelfritt om

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{4}$$

(ii): Låt $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ett vektorfält. $\boldsymbol{F}$ sägs vara ett konservativt fält om det finns en skalärvärd C^1-funktion $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ så att $\boldsymbol{F} = \nabla\phi$, där ϕ sägs vara en potential till $\boldsymbol{F}$.

3 Jordans kurvsats

Definitioner av enkel/sluten kurva:

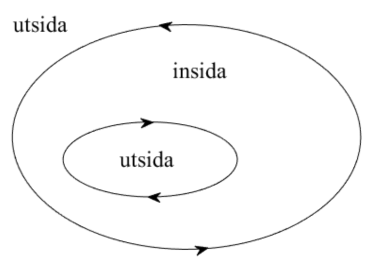
- En kurva $\boldsymbol{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sägs vara sluten om $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$.
- En kurva $\boldsymbol{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sägs vara enkel om $\forall t_1, t_2 \in [a, b), \boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$.

enkel, ej sluten — sluten, ej enkel — sluten, ej enkel — ej enkel, ej sluten

Låt γ vara en enkel och sluten kurva i $\mathbb{R}^2$. Då består $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ av exakt två sammanhängande komponenter. Dessa komponenter kallas för kurvans in- och utsida. Vi kan även notera att en enkel sluten kurva i $\mathbb{R}^2$ genomlöpt moturs är ekvivalent med att insidan ligger till vänster om färdriktningen.

Def: En orienterad, enkel och sluten kurva i $\mathbb{R}^2$ sägs vara positivt orienterad om insidan av kurvan ligger till vänster om färdriktningen.

Def: Randen till ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är positivt orienterad om D ligger till vänster om färdriktningen.



4 Greens formel

Låt P och Q vara två C^1-funktioner definierade i en öppen mängd Ω i planet. Om det kompakta delområdet D av Ω har en rand ∂D som utgörs av en eller flera styckvis C^1-kurvor och som är positivt orienterad så är

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \tag{5}$$

4.1 Areabestämmning av Greens formel

Genom att utgå från Greens sats (5) kan arean av ett område beräknas med hjälp av kurvintegraler genom att välja P och Q på rätt sätt. En allmän formel för arean av ett område ges av

$$arean(D) = \lambda \oint_{\partial D} xdy - (1-\lambda) \oint_{\partial D} ydx \tag{6}$$

5 Potentialfält

Sats 9.4.4: Låt $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ett potentialfält med potentialen ϕ.
Om $\phi \in C^2$ så är $\boldsymbol{F}$ virvelfritt.

Bevis:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \nabla\phi = (P, Q) \\ \Rightarrow P &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}, \\ Q &= \frac{\partial\phi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}. \end{aligned} \tag{7}$$

Vilket enligt Clairauts sats ger $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. $\square$

Notis: I synnerhet, för ett konservativt, tvådimensionellt fält, $\boldsymbol{F} = \nabla\phi$, gäller att om $\phi \in C^2 \Rightarrow$ arbetet som $\boldsymbol{F}$ utför är oberoende av väg. $\iff$ $\boldsymbol{F}$ inte utför något arbete längs en sluten bana. Detta gäller också i högre dimensioner.

Sats 9.4.2: Låt $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ett konservativt fält med potential ϕ i det öppna området $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Då gäller för varje C^1-kurva γ i Ω att

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \phi(\boldsymbol{b}) - \phi(\boldsymbol{a}), \tag{8}$$

där $\boldsymbol{a}$ motsvarar kurvans startpunkt och $\boldsymbol{b}$ motsvarar kurvans slutpunkt.

Tolkningar av 9.4.2: En fysikalisk tolkning av satsen lyder:
"Det utförda arbetet är samma sak som förändringen i potentialenergin."
Medan motsvarande matematiska tolkning lyder:
"Satsen är en generalisering av kalkylens fundamentalsats."

I allmänhet gäller att om ϕ_1, ϕ_2 är potentialer för samma $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} = \nabla\phi_1 = \nabla\phi_2 \Rightarrow \nabla(\phi_1 - \phi_2) = \boldsymbol{0}, \tag{9}$$

i någon domän Ω. Enligt sats 2.4.5 ger detta en konstant.

Sats 9.4.3: Låt $\boldsymbol{F}$ vara ett kontinuerligt fält i den öppna, bågvis sammanhängande mängden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Om

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{10}$$

är oberoende av väg (dvs. för alla C^1-kurvor γ i Ω), så är $\boldsymbol{F}$ konservativt.

6 Fysikaliska exempel

- Gravitationsfältet från en punktmassa.
  Enligt Newtons gravitationslag existerar ett kraftfält som flödar utfrån en punktkälla

i masscentrum av en kropp. Arean av sfären med centrum i masscentrum växer proportionellt mot konservationen av flödet. På så sätt motiveras att kraften, enligt r^2, beräknas genom:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{GMm\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{11}$$

där $\boldsymbol{r}$ är en godtycklig vektor mellan två kroppar och kan skrivas

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \tag{12}$$

Detta medför även att $\boldsymbol{F}$ har en singularitet i origo. Det är även lätt att kontrollera att $\boldsymbol{F} = \nabla\Phi$ där $\Phi(x, y, z) = \frac{GMm}{r}$

- Elektriskt fält från en punktladdning.
  Coulombs lag:
  - $\boldsymbol{F} \,||\, \boldsymbol{r}$
  - $|\boldsymbol{F}| \propto Q$
  - $|\boldsymbol{F}| \propto q$
  - $|\boldsymbol{F}| \propto \frac{1}{r^2}$

  Def: Det elektriska fältet $\boldsymbol{E}$ som produceras av källan Q satisfierar

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{13}$$

  där ε är mediets elektriska permittivitet.

7 Enkelt sammanhängande områden

Def: Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Ω sägs vara enkelt sammanhängande om:

- Ω är bågvis sammanhängande.
- Insidan till varje enkel sluten kurva i Ω ligger helt och hållet inom Ω.

Sats 9.4.5: Om $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ uppfyller villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i det enkelt sammanhängande området $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, då har $\boldsymbol{F}$ en potential i Ω.

Alternativ def: Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ω sägs vara enkelt sammanhängande om:

- Ω är bågvis sammanhängande.
- Varje enkel, sluten kurva i Ω kan kontinuerligt kontraheras till en punkt utan att lämna Ω.

Notera: $\mathbb{R}^3\backslash\{\text{en punkt}\}$ är enkelt sammanhängande. $\mathbb{R}^3\backslash\{\text{en linje}\}$ är inte enkelt sammanhängande.

Definition:

$$\mathbb{B}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{\hat{\theta}}{r} \tag{14}$$

Sats: Om $\Omega = \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$ och $\boldsymbol{F} : \Omega \to \Omega$ är virvelfritt, då gäller att $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K} + c \cdot \mathbb{B}$, för någon $c \in \mathbb{R}$, och något konservativt $\boldsymbol{K}$.

Låt

- V $= \{\boldsymbol{F} : \Omega \to \Omega \mid \boldsymbol{F}$ virvelfritt$\}$. Enligt sats 9.4.4: $W \subseteq V$ om Ω är enkelt sammanhängande.
- W $= \{\boldsymbol{F} : \Omega \to \Omega \mid \boldsymbol{F}$ konservativt$\}$. Sats 9.4.5: $W = V$, då Ω enkelt sammanhängande.

Sats: $dim(\frac{V}{W}) = 1$ då $\Omega = \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$. Mer allmänt gäller: $dim(\frac{V}{W}) =$ antalet hål i Ω.

8 Gauss divergenssats

Låt $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1-fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om det kompakta området $K \subseteq \Omega$ har en rand δK som består av en eller flera C^1-ytor och som är orienterad med utåtriktad normal så gäller:

$$\oiint_{\partial K} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{N}}\, dS = \iiint_K \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dV. \tag{15}$$

$\uparrow$ s.k. flödesintegral

9 Stokes sats

Låt $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1-fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om Y är ett orienterat ytstycke i Ω med (positivt) orienterad rand δY så gäller

$$\oint_{\partial Y} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \hat{\boldsymbol{N}} dS. \tag{16}$$

10 Direkta beräkningar av flödesintegraler

$\oiint_Y \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{N}}\, dS$ där Y är en sluten yta i $\mathbb{R}^3$ och $\hat{\boldsymbol{N}}$ är en utåtriktad enhetsnormal. Integralen kallas flödet av $\boldsymbol{F}$ ut genom Y".

"Direkt beräkning" innebär att man hittar en lämplig parametrisering av Y och beräknar motsvarande dubbelintegral.

Man behöver en formel för $\hat{\boldsymbol{N}} dS$:

1. Allmänt: Yta ges av $Y = \{\boldsymbol{r}(s,t)|^{(s,t)} D \subseteq \mathbb{R}^2\}$

   $\Rightarrow \hat{\boldsymbol{N}} dS = \pm(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t})\, dsdt.$
2. Ett specialfall ges av funktionsytan $z = f(x,y)$

   $\Rightarrow \hat{\boldsymbol{N}} dS = \pm(-f_x, -f_y, 1)\, dxdy.$
3. Ett annat specialfall ges av den implicita funktionsytan $F(x,y,z) =$ konstant, där $F_z \neq 0$

   $\Rightarrow \hat{\boldsymbol{N}} dS = \pm(\frac{\nabla F}{F_z})\, dxdy.$