Flervariabelsanalys - lv. 6

Sammanfattning av veckans föreläsningar

Axel Forsman, Max Fölsch,
Jonny Fredriksson, Jonas Lauri

Mars 2019

1 Terminologi för Kurvintegraler

Om $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ är en C^1-kurva och $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är ett integrerbart vektorfält så kallas integralen

$$\int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt$$

för kurvintegralen / arbetsintegralen av $\boldsymbol{F}$ längs kurvan $\gamma = \{\boldsymbol{r}(t) : a \le t \le b\}$. Den fysikaliska innebörden är det arbete som en kraft utövar på en partikel som rör sig längs kurvan parametriserad av $\boldsymbol{r}$. Kurvintegralen är väldefinierad, med andra ord oberoende av parametriseringen. Detta kan visas genom att välja en annan parametrisering, inse att det finns en växande funktion som kopplar samman dessa som vi sett tidigare i kursen och använda kedjeregeln.

Givet kurvan γ och vektorfältet $\boldsymbol{F}$ skriver man för kurvintegraler normalt den mer kortfattade notationen

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Vidare, om $\boldsymbol{r} = (x,y)$, $d\boldsymbol{r} = (dx, dy)$, $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2) = (P, Q)$ så gäller att

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy.$$

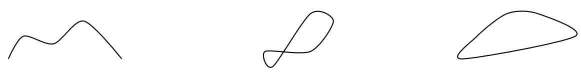
Två viktiga anmärkningar är att

$$\int_{-\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \quad \text{och} \quad \int_{\sum_{i=1}^n (\gamma_i)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Om man integrerar längs en sluten kurva γ i moturs riktning används normalt integralsymbolen

$$\oint_\gamma .$$

För övrigt sägs en kurva $\boldsymbol{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ vara sluten om $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$, respektive enkel om, $\forall t_1, t_2 \in [a, b), \boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}(t_2) \implies t_1 = t_2$. Nedan finnes tre exempel på detta.

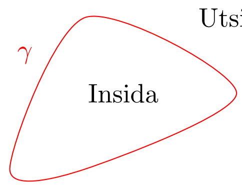


Enkel   Sluten   Enkel & Sluten

2 Greens sats

För att formulera Greens sats behöver vi reda ut några begrepp. För det första så vill vi kunna dela upp planet i två delar, detta görs med följande sats.

Sats. *Jordans kurvsats*
Låt γ vara en enkel, sluten kurva i $\mathbb{R}^2$. Då består $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ av exakt två sammanhängande komponenter. Vi kallar dessa kurvans insida och utsida.



Notera att insidan av kurvan ligger till vänster om färdriktningen hela vägen runt då kurvan genomlöpes moturs om och endast om kurvan är enkel och sluten. Med detta sagt kan vi göra följande definition.

Definition. Randen, ∂D, till något sammanhängande område D i planet sägs vara positivt orienterat om D ligger till vänster om färdriktningen.

Vi har nu alla komponenter för att formulera Greens sats.

Sats. *Greens sats*
Låt P och Q vara två C^1-funktioner definierade i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Om det kompakta delområdet D av Ω har en positivt orienterad rand ∂D som utgörs av en eller flera styckvis C^1-kurvor med positiv orientering så är

$$\oint_{\partial D} P\ dx + Q\ dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\ dxdy.$$

Om området D innehåller hål så måste randen delas upp i delar som uppfyller vilkoret för positivt orienterad rand.

Vid bevis av Greens sats antar vi först att D kan partitioneras i ett ändligt antal områden som alla är reguljära i x-led. Betrakta ett sådant område; $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \geq x \geq b, \alpha(x) \geq y \geq \beta(x)\}$, där $\alpha(x), \beta(x) \in C^1$ och $\partial E = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$. Visa sedan att

$$\oint_{\partial E} P\,dx = \sum_{i=1}^{4} \oint_{\gamma_i} P\,dx = \iint_E -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy.$$

Då vi antagit att D kan partitioneras i ändligt många delområden av typen E så gäller att $D = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Vidare gäller att $\sum_{i=1}^{n} \partial E_i = \partial D$, ty en kurva γ på randen av ett område E_j som gränsar till ett annat område E_{j+1} kommer tas ut av den motriktade, i övrigt identiska, kurvan $-\gamma$ på randen av E_{j+1} eftersom $\oint\limits_{-\gamma} P\,dx = -\oint\limits_{\gamma} P\,dx$. Alltså gäller att

$$\oint\limits_{\sum_{i=1}^{n} \partial E_i} P\,dx = \oint_{\partial D} P\,dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy.$$

På samma sätt kan vi anta att D kan delas upp i ändligt många delområden reguljära i y-led och vidare visa att

$$\oint_{\partial D} Q\,dy = \iint_D = \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy,$$

och sammantaget får vi då att

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy.$$

Denna sats knyter samman kurvintegralen längs den orienterade randen av ett område med en viss dubbelintegral som eventuellt kan leda till enklare beräkningar, men Greens sats kan också användas för att bestämma arean av området D. Betrakta följande speciella kurvintegral, som enligt Greens sats är lika med

$$\oint_{\partial D} -y\,dx = \iint_D -\frac{\partial(-y)}{\partial y}\,dxdy = \iint_D dxdy = Area(D).$$

På samma sätt får vi att

$$\oint_{\partial D} x\,dy = Area(D),$$

och sammanfattat får vi att arean av området D kan beräknas med:

$$Area(D) = \oint_{\partial D} -y\,dx = \oint_{\partial D} x\,dy = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} -y\,dx + x\,dy.$$

3 Potentialfält

Vi noterar att om $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ så är HL $= 0$ i Greens sats för varje D sådant att $\boldsymbol{F} \in C^1(D)$. Det implicerar att

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

för varje sluten och enkel kurva γ så länge $\boldsymbol{F} \in C^1$ i området som innesluts av γ. Detta ordinerar följande definitioner:

Definition. Låt $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ vara ett C^1-fält i det öppna området $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. $\boldsymbol{F}$ sägs vara virvelfritt (irrotational) om

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Definition. Låt $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ett vektorfält. $\boldsymbol{F}$ sägs vara ett potentialfält eller ett konservativt fält om det finns $\phi \in C^1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s.a.

$$\boldsymbol{F} = \nabla\phi$$

potential till $\boldsymbol{F}$

I två dimensioner (dvs. $n = 2$) om $\boldsymbol{F}$ är konservativt med potential ϕ, där $\phi \in C^2$, så implicerar det att $\boldsymbol{F}$ är virvelfritt, då

$$\boldsymbol{F} = \nabla\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \implies \underbrace{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}}_{\text{Lika om } \phi \in C^2 \text{ enl. Clairauts}}$$

Sats. *(9.4.2) Låt $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ett potentialfält med potential ϕ i det öppna området $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Då gäller för varje C^1-kurva, γ, i Ω att*

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \phi(\boldsymbol{b}) - \phi(\boldsymbol{a}), \quad \text{där } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ är start- respektive slutpunkt}$$

Beviset av ovanstående sats följer av kedjeregeln och kalkylens fundamentalsats. Den kan ses som en generalisering av kalkylens fundamentalsats, ty då $n = 1$ och γ är intervallet $[a, b]$ längs x-axeln återfås denna.

Sats. *(9.4.3) Låt $\boldsymbol{F}$ var ett kontinuerligt fält i den öppna sammanhängande mängden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Om $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ är oberoende av väg, dvs för alla C^1-kurvor γ i Ω, så är $\boldsymbol{F}$ konservativt.*

Notera att sats 9.4.3 kan betraktas som sats 9.4.2 omvänt.

Bevisidé: Välj en baspunkt $\boldsymbol{a}$ i Ω och tag $\phi(\boldsymbol{x}) = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$,
där γ är en godtycklig kurva $\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{x}$ inom Ω. Då är

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\phi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i) - \phi(\boldsymbol{x})}{h},$$

där $\phi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i) \overset{\text{def.}}{=} \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, där γ_2 är en valfri C^1-kurva $\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i$. Välj $\gamma_2 = \gamma_1 + \gamma_3$, där γ_1 är en valfri kurva $\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{x}$ och γ_3 är raksträckan $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i$ i $\boldsymbol{e}_i$-riktning. Då blir täljaren

$$\int\limits_{\gamma_3} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_0^1 F_i(\boldsymbol{x} + th\boldsymbol{e}_i) dt \implies ... \implies \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = F_i.$$

4 Fysikaliska Tillämpningar

Flera för fysiker viktiga vektorfält är konservativa potentialfält, teorin vi gått igenom den här veckan kan användas för att beskriva och göra beräkningar på dessa.

Gravitationskraften mellan två objekt beskrivs med:

$$\boldsymbol{F_G} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}},$$

där m och M är objektens massor, r avståndet mellan objekten och G en universell konstant.

$$\boldsymbol{F_G} = -GMm\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -GMm\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right),$$

$\boldsymbol{F_G}$ har en singularitet i origo. Utanför origo är $\boldsymbol{F}$ ett potentialfält, nämligen $\boldsymbol{F} = \nabla\phi$ där

$$\phi(x,y,z) = \frac{GMm}{r} = GMm\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right),$$

Den elektriska kraften mellan två laddade partiklar beskrivs, med hjälp av Coulombs lag:

$$\boldsymbol{F_V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{qQ}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}},$$

där q och Q är partiklarnas laddningar, r avståndet mellan partiklarna och $\frac{1}{4\pi\varepsilon}$ en konstant beroende på mediets elektriska permittivitet. Det elektriska fältet $\boldsymbol{E}$ som skapas av källan Q defineras

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Det elektriska fältet är konservativt utanför origo och den potentialen kallas för spänning, relaterat enligt

$$\boldsymbol{E} = \nabla V,$$

där

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}.$$

I båda fallen är kraften parallell med $\hat{\boldsymbol{r}}$ och proportionell mot $\frac{1}{r^2}$.

5 Mer om Potentialer

Vi vet nu att då $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är ett konservativt fält och $\boldsymbol{F} \in C^1$ så är $\boldsymbol{F}$ är virvelfritt.
Frågan som återstår är om den motsatta implikationen stämmer, d.v.s., om det faktum att $\boldsymbol{F}$ är virvelfritt i sin definitionsmängd implicerar att $\boldsymbol{F}$ är konservativt.

Vi försöker tillämpa Greens sats

Tag en enkel, sluten C^1-kurva γ inom $\boldsymbol{F}$s definitionsmängd och betrakta

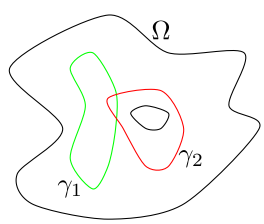
$$\oint\limits_{\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{insidan(\gamma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \overset{?}{=} 0$$

Det enda som kan gå fel är att $\boldsymbol{F}$ inte är definerad på hela insidan till γ. Vi behöver därför introducera ett nytt villkor.

Definition. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ är *enkelt sammanhängande* om

- Ω är (bågvis) sammanhängande
- Insidan till varje enkel sluten kurva i Ω ligger helt och hållet i Ω

Informellt: Ω har inga hål



Man kan tänka att varje kurva i området Ω ska kunna dras ihop till en punkt utan att lämna Ω. Som ni ser i figuren är det möjligt för γ_1, men ej för γ_2.
$\Longrightarrow$ Ω är ej enkelt sammanhängande i detta fall.

Vi kan nu motivera följande sats.

Sats. *(9.4.5) Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ vara ett enkelt sammanhängande område. Då gäller*

$$\text{Om } \boldsymbol{F} = (P, Q) \text{ uppfyller villkoret } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x,y) \in \Omega \implies \boldsymbol{F} \text{ har en potential i } \Omega$$

Med följande definition kan vi utöka begreppet enkelt sammanhängande till $\mathbb{R}^n$:

Definition. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ är *enkelt sammanhängande* om

- Ω är (bågvis) sammanhängande
- Varje enkel sluten kurva i Ω kan kontinuerligt kontraheras till en punkt utan att lämna Ω

Notera att $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{en punkt}\}$ är enkelt sammahängande medan $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{en linje}\}$ inte är det.

6 Divergens och Rotation

Vi har under veckan definerat två operationer, div och curl (rot på svenska):

Definition. Låt $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ett C^1-vektorfält. Divergensen av $\boldsymbol{F}$ är skalärfältet som ges av

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Definition. Låt $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ett C^1-vektorfält. Rotationen av $\boldsymbol{F}$ är vektorfältet som ges av

$$\operatorname{curl}(\boldsymbol{F}) = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}.$$

Observera att dessa operationer kan ses som vektoroperationer med $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ sett som en vector. Detta kallas ibland för nablaräkning.

7 Generaliseringar av Greens sats

Notera att om $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ så kan vi tänka att $\boldsymbol{F} = (P, Q, 0)$, vilket medför att $\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$. Vi kan nu omformulera Greens sats med:

$$\oint_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{D} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \hat{\boldsymbol{N}} \, dS,$$

där $\hat{\boldsymbol{N}} \, dS$ är ytelementet för D. Vi ska nu generalisera denna sats till $\mathbb{R}^3$.

Sats. *Stokes Sats (10.3.2)*
Låt $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1-fält i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om Y är ett orienterat ytstycke i Ω med orienterad rand ∂Y så gäller

$$\oint\limits_{\partial Y} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{Y} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \hat{\boldsymbol{N}} \; dS.$$

Betrakta nu, för $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, där $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ och $\hat{\boldsymbol{N}} d\boldsymbol{r} = (dy, -dx)$, skalärprodukten $\boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{N}} d\boldsymbol{r} = -Qdx + Pdy$. Enligt Greens sats:

$$\oint\limits_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{N}} d\boldsymbol{r} = \oint\limits_{\partial D} -Q \; dx + P \; dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} \right) \; dxdy = \iint_D (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) \; dA,$$

där dA är den infinitesimala arean. Notera att $\hat{\boldsymbol{N}}$ pekar ut från D. Med denna omformulering gjord kan vi introducera Gauss Divergens sats.

Sats. *Gauss Divergens Sats (10.2.1)*
Låt $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1-fält i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om det kompakta området $K \subseteq \Omega$ har rand ∂K som helt består av C^1-ytor och som är orienterad med utåtriktad normal så gäller

$$\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\partial K} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{N}} dS = \iiint\limits_{K} (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) \, dV.$$

s.k. flödesintegral, "flödet av $\boldsymbol{F}$ ut genom ∂K"

En allmän formel för $\hat{\boldsymbol{N}} \; dS$, för ytan $Y = \{\boldsymbol{r}(s,t) : (s,t) \in D \subset \mathbb{R}^2\}$ är

$$\hat{\boldsymbol{N}} \; dS = \pm \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \right) dsdt.$$

Plus eller minus beror på ytan och måste redas ut för varje beräkning. Nedan följer två viktiga specialfall.

För en funktionsyta, $z = f(x, y)$:

$$\Longrightarrow \; \hat{\boldsymbol{N}} \; dS = \pm(-f_x, -f_y, 1) \; dxdy.$$

För en implicit funktionsyta, $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \text{konstant}$, där $F_z \neq 0$:

$$\Longrightarrow \; \hat{\boldsymbol{N}} \; dS = \pm \left(\frac{\nabla \boldsymbol{F}}{F_z} \right) \; dxdy.$$