Vecka 6 Genomgång

Isac Nordin Axel Larsson, Kelly Ma, Lukas Fu, Mustafa Abbas, Thomas Trinh

February 2019

1 Kurvintegral av vektorfält

Låt $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ vara en C^1-kurva och $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ ett integrerbart vektorfält. Kvantiteten

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

kallas för kurvintegralen eller arbetsintegralen av $\mathbf{F}$ längs kurvan $\gamma = \{\mathbf{r}(t)|a \leq t \leq b\}$

Proposition: Kurvintegral är väldefinierat, det vill säga att integralens värde är oberoende av valet av parametrisering.

Bevis. Om $\mathbf{r}_2 : [c, d] \to \mathbf{R}^n$ är en annan C^1-parametrisering av samma kurva då finns det en växande C^1 -funktion $\phi : [c, d] \to [a, b]$ sådant att $\mathbf{r}(\phi(s)) = \mathbf{r}_2(s)$. Sätt $t = \phi(s) \implies \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}^{'}(t)dt = \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi(s))) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}(\phi(s)) \cdot \phi^{'}(s)ds$. Enligt kedjeregeln så är $\frac{d}{dt} \cdot \mathbf{r}(\phi(s)) \cdot \phi(s)ds = \frac{d}{ds} \cdot \mathbf{r}_2(s)$ och $\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi(s))) = \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(s))$, vidare blir integralen $= \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(s)) \cdot \mathbf{r}_2^{'}(s)ds \quad \square$

$\square$

Notation:

1) Givet en kurva γ och ett fält $\mathbf{F} = (F_1, ..., F_n)$ kan integralen skrivas mer kortfattat $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där $d\mathbf{r} = (dx_1, ..., dx_n)$.

Specialfallet $n = 2$: Då $d\mathbf{r} = (dx, dy)$ och $\mathbf{F} = (P, Q) \implies \oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_\gamma P \cdot dx + Q \cdot dy$.

2) Om man byter orienteringen av γ så går man längs kurvan $-\gamma$ och integralen $\oint_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

3) Om man har flera styckvisa kurvor $\gamma_1, ..., \gamma_k$ så blir kurvintegralen över dessa kurvor $= \oint_{\bigcup\limits_{i=1}^{k} \gamma_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{k} \oint_{\gamma_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

2 Greens sats i $\mathbb{R}^2$

2.1 Jordans sats

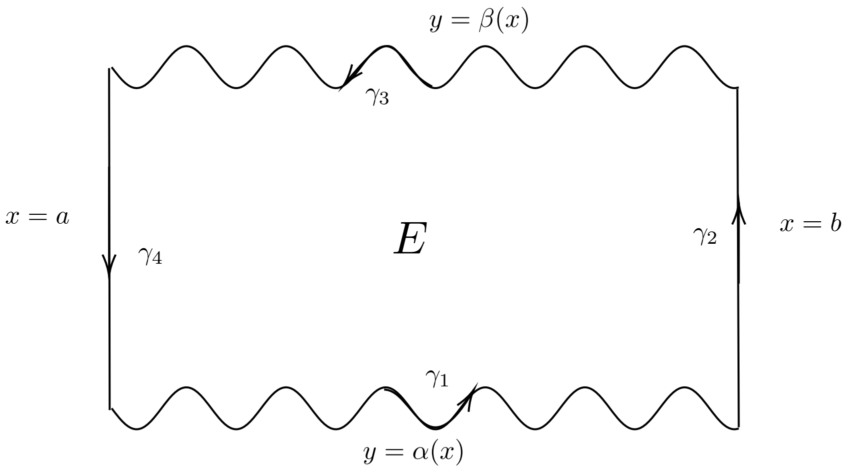
låt γ vara en enkel och sluten kurva i $\mathbb{R}^2$. Då består $\mathbb{R}^2\backslash\gamma$ av exakt 2 sammanhängande komponenter. Dessa komponenter kallas för kurvans insida och utsida. En enkel sluten kurva sägs vara positivt orienterad om insidan av kurvan ligger till vänster om färdningsriktningen. Detta brukar noteras med $\oint$ vilket är tecknet för kurvintegralen öven en sluten kurva.

2.2 Greens sats

Låt P och Q vara 2 C^1-skalärfält definerade i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Om det kompakta delområdet D av Ω har en rand ∂D som utgöres av en eller flera C^1-kurvor vilket alla har positiv orientering m.a.p D så är:

$$\oint_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

Bevis. Steg 1:Antag först att vi har ett område som är reguljärt i x-led, dvs $E = \{(x,y)|a \le x \le b, \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}, \alpha, \beta \in C^1$-funktioner enligt Figur 1



Figur 1: *Greens sats*

Vi delar up kurvan ∂E till $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ och vill visa att

$$\oint_{\partial E} P(x,y)dx = \iint_E -\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

VL:

$$\oint_{\partial E} P(x,y)dx = \int_{\gamma_1} P(x,y)dx + \int_{\gamma_2} P(x,y)dx + \int_{\gamma_3} P(x,y)dx + \int_{\gamma_4} P(x,y)dx = (**)$$

för kurvintegralen längs γ_2 och γ_4 går kurvorna i y-led men vi summerar över x-led alltså blir båda lika med noll.

$$(**) = \int_{\gamma_1} P(x,y)dx + \int_{\gamma_3} P(x,y)dx = \int_a^b P(x,\alpha(x))dx + \int_b^a P(x,\beta(x))dx = \int_a^b \Big[P(x,\alpha(x)) - P(x,\beta(x))\Big]dx$$

HL:

$$\iint_E -\frac{\partial P}{\partial y} = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b \Big[-P(x,y)\Big]_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dx = \int_a^b \Big[P(x,\alpha(x)) - P(x,\beta(x))\Big]dx$$

har nu visat VL=HL.

Steg 2:Antag att området D kan partitioneras i ett ändligt antal många delområden av samma form som i steg 1, m.a.o. $D = U_{i=1}^n E_i$. Vi vet då att för varje delområde gäller:

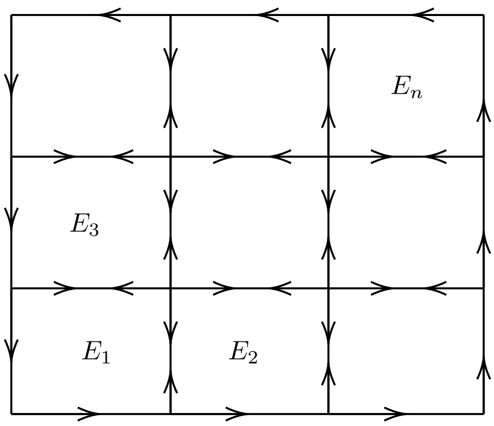
$$\oint_{\partial E_i} P(x,y)dx = \iint_{E_i} -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

vill då visa att

$$(1) : \sum_{i=1}^n \oint_{\partial E_i} P(x,y)dx = \oint_{\partial E} P(x,y)dx$$

$$(2) : \sum_{i=1}^n \iint_{E_i} -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \iint_E -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

(1): Enligt bild 2 som visualiserar problemet visar att kurvintegralen över alla interna sidor kanceleras och det ända som är kvar är en kurvintegral över hela området
(2): klart att om vi tar dubbelintegralen över en area och summerar ihop integraler så får man dubbelintegralen över den totala arean.



Figur 2: *Greens sats*

Steg 3: På samma sätt som steg 1 och 2 kan man visa att om D kan partitioneras i ändligt antal delar, alla reguljära i y-led så är: $\oint_{\partial D} Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial X} dxdy$

□

2.3 Användningar av Greens sats

Anmärkning 1. Greens sats handlar i princip om att övergå från en kurvintegral till en dubbelintegral som förhoppningsvis är enklare att hantera.

Det man även kan göra är att gå baklänges. Det vill säga beräkna arean av ett område som innesluts av en kurva. Låt oss erinra oss om Greens sats:

$$\oint_D P\,dx + Q\,dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy$$

Om vi väljer att sätta $Q = x$ och $P = 0$ kan vi beräkna arean av området D med följande kurvintegral

$$Area(D) = \oint_{\partial D} x\,dy. \tag{1}$$

På liknanade kan vi sätta $Q = 0$ och $P = -y$ vilket skulle ge oss

$$Area(D) = \oint_{\partial D} -y\,dx. \tag{2}$$

Då kan man fråga sig om dessa är de enda formlerna som kan användas för att beräkna arean av området D. Svaret till den frågan är nej. Det är nämligen så att det finns oändligt många olika sätt att beräkna arean. Det gäller bara att hitta ett val av P, Q sådan att

$$(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = 1. \tag{3}$$

Eftersom då får vi att

$$\iint_D 1\,dx\,dy, \tag{4}$$

vilket vi vet från kapitel 6 om dubbelintegraler, beräknar arean på området D.

3 Potentialer och exakta differentialformer

Som vi tidigare har sett kan en arbetsintegral skrivas, enligt Greens sats, på följande sätt

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy. \tag{5}$$

Denna likheten gäller dock under förutsättning att kraftfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett C^1-fält i D.

Ytterligare så kan vi notera att om villkoret

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{6}$$

är uppfyllt så gäller det att högerledet i (5) blir lika med noll för varje vald D, om $\mathbf{F}$ är ett C^1-fält. Följaktligen blir vänsterledet i (5) lika med noll. Med detta kan vi nu konstatera att kurvintegralen

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \tag{7}$$

för varje sluten enkel γ. Det vill säga arbetet som kraftfältet $\mathbf{F}$ utför på en partiell är endast beroende av start- och slutpunkterna och inte av kurvans förlopp.

Med de ovannämnda observationer, kan vi nu motivera två definitioner.

Definition 1. Låt $\mathbf{F} = (P, Q)$ vara ett C^1-fält i det öppna området $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$. Då gäller det att $\mathbf{F}$ kallas virvelfritt om

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{8}$$

Definition 2. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ett vektorfält. $\mathbf{F}$ sägs då vara ett potential-fält om det finns en skalärvärd C^1-funktion $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sådan att

$$\mathbf{F} = \nabla\phi. \tag{9}$$

ϕ kallas då för en potential till $\mathbf{F}$.

Låt oss nu formulera en sats för virvelfria fält och sedan bevisa det.

Sats 1. *Låt $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ett konservativt fält med en potential ϕ. Då gäller det att om $\phi \in C^2$, så kallas $\boldsymbol{F}$ virvelfritt.*

Bevis. Vi vet utifrån (9) att följande gäller

$$\mathbf{F} = \nabla\phi = (P, Q). \tag{10}$$

Vidare har vi att de partiella derivatorna till ϕ ges av

$$\nabla\phi = (\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}). \tag{11}$$

Det vill säga, följande två likheter gäller

$$P = \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{12}$$

$$Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \tag{13}$$

Om vi väljer nu att partiellt derivera P med avseende på y respektive Q med avseende på x, så får vi att

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}. \tag{14}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \tag{15}$$

Om vi kommer ihåg från kapitlet om partiella derivator, så gäller det enligt Clairaut sats att

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}. \tag{16}$$

vilket innebär att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \tag{17}$$

då ϕ är en C^2-funktion. □

3.1 Sats 9.4.2

Låt $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara ett potentialfält med potential ϕ i det öppna området $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Då gäller för varje C^1-kurva γ i Ω att

$$\implies \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$$

det vill säga att det utförda arbetet i ett konservativt fält i $\mathbb{R}^n$ endast beror på start och slutpunkt.

Bevis. Välj någon C^1-parametrisering för γ:

$$\gamma = \{\mathbf{r}(t) | a \leq t \leq b\}$$

$$\implies \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t)dt$$

$$= \int_a^b \phi(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t))dt$$

$$= \phi(\mathbf{r}(t))|_a^b = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a))) = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$$

□

3.2 Sats 9.4.3

Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt fält i en öppen sammanhängande mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Då gäller att om $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av följd kurva $\iff$ $\mathbf{F}$ har en potential ϕ i Ω $\iff$ $\mathbf{F}$ är konservativt.

Bevis. Välj en godtycklig punkt $\mathbf{a} \subseteq \Omega$. Om en funktion $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ definieras så att $\phi(\mathbf{x}) = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ är en godtycklig C^1-kurva från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{x}$ i Ω. Med dessa antaganden är ϕ väldefinierad i Ω.

Det måste visas att $\mathbf{F} = \nabla\phi$ enligt definition av potential. Sätt $\mathbf{F} = (F_1, F_2, ..., F_n)$. Ska nu visa att $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = F_i$ för $\forall i = (1, 2, ..., n)$.

Per definitionen av partiell derivata är $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_i)-\phi(\mathbf{x})}{h}$. De två termerna i denna nämnare är båda C^1 kurvor från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{x}$ respektive $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i$. Om dessa kurvor väljes så att de är så lika som möjligt blir den enda skillnaden att den andra får en extra sträcka från $\mathbf{x}$ till $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i$. Denna del är ett rakt sträck då den endast beror av en variabel. Enligt gränsvärdet ovan så blir kurvintegralen av denna del det enda som blir kvar då skillnaden mellan de två kurvintegralerna tas fram.

$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ blir då lika med $\lim_{h \to 0} \int_0^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Med omvandling till $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x} + h\mathbf{e}_i$ som $\implies$ $\mathbf{r}' = h\mathbf{e}_i$ fås att alla komponenter i $\mathbf{F}$ förutom F_i försvinner då bara den komponenten multipliceras med nollskild komponent.

Slutligen fås då integralen $\lim_{h\to 0} \int_0^1 F_i(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i)dt$. Då h går mot 0 fås slutligen med uträkning av integralen $F_i(\mathbf{x})$. □

□

4 Fysikaliska tillämpningar av potential

4.1 Gravitationsfältet från en punktmassa

Gravitationen är konservativ och har därför en potential. Enligt Newtons Gravitationslag är kraften från en punktmassa $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{-GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ där M är massan kraftfältet flödarfrån, m är den påverkade massan, G är gravitationskonstanten och r är radien mellan M och m. Observera minustecknet; detta är med då kraftens riktning är i motsatt riktning från radiens ortsvektor då gravitationen är en tilldragande kraft. Då det totala flödet ska bevaras för varje vald radie och då ytarean är $4\pi r^2$ avtar kraftfältets styrka med faktor $\frac{1}{r^2}$.

Med normering av $\hat{\mathbf{r}}$ fås att $\mathbf{F} = \frac{-GMm\mathbf{r}}{r^3}$ där som med uppdelning i sina koordinater blir det $\mathbf{F} = -GMm(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}})$. Observera att $\mathbf{F}$ har singularitet i $(0,0,0)$ och alltså inte är definierat där.

Detta uttryck kan lätt integreras varifrån det kan fås fram att potentialen till gravitionsfältet från en punktmassa är $\phi(x,y,z) = \frac{GMm}{r}$.

4.2 Elektriskt fält från en punktladdning

Det elektriska fältet är också konservativt och även där kan en potential tas fram. Denna är väldigt lik potentialen med skillnaden att kraften är i samma riktning som radiens ortsvektor och att Coulombs lag ger lita andra konstanter i uttrycket.

Uttrycket $V = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon r}$ där Q är punktladdningen som kraftfältet flödar ifrån, r är radien, ε är det specifika materialets permetivitet och V är potentialen.

5 Nödvändiga villkor för ett konservativt vektorfält

Av satsen 9.4.4 följer att en tvådimensionellt konservativt fält $\mathbf{F}$ vars potential $\phi \in C^2$ måste vara virvelfritt på insidan av en enkel sluten C^1 kurva γ , Men det omvända gäller i allmänhet inte för att det inte finns någon garanti för $\mathbf{F}$ att vara definierad på hela Ω vilket är mängden γ inneslutar. Man kan även tolka det så att vara virvelfritt är en lokal egenskap hos fältet medan att ha potentialfunktion i hela dess definitionsmängd Ω är en global egenskap. För att kunna dra slutsatt om kraftfält är konservativt eller inte måste vi därför inför ett villkor med global egenskap.

5.1 Definition av enkelt sammanhängande

Mängd Ω sägs vara sammanhängande om Omega är bågvist sammanhängande och varje enkel sluten kurva i Ω enbart inneslutar punkter som också tillhör Ω. Det finns även en alternativ definition av enkelt sammanhängande som säger att om Ω är bågvist sammanhängande varje enkel och sluten kurva i Ω kan kontinuerligt kontraheras till en punkt utan att lämna Ω, då är Ω enkel sammanhängande.

Den alternativ definition har fördel att kunna generaliseras till högre dimensioner. Med denna definitionen kan man bevisa att för en sammanhängande mängd Ω, är $\Omega\backslash$en punkt fortfarande enkelt sammanhängande. $\Omega\backslash$en linje är dock inte enkelt sammanhängande.

5.2 Sats 9.4.5

Med de nya definitioner kan villkor för ett konservativ C^2 fält bestäms. Om $\mathbf{F}$=(P,Q) är virvelfritt i en enkel sammanhängande område i $\mathbb{R}^2$ så har $\mathbf{F}$ en potentialfunktion.

5.3 Sats

Låt $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ och $\mathbf{F}\ :\ \Omega \to \Omega$ är virvelfritt, då gäller att $\mathbf{F} = \mathbf{K} + C \cdot \mathbf{B}$ för något konservativt $\mathbf{B}$ och C $\subseteq \mathbb{R}$.

6 Greens sats i högre dimensioner

En omformulering av Greens Sats ger att:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{N} dS$$

Här betraktas D som en yta i $\mathbb{R}^3$, som ligger i xy-planet. $dS = dxdy$ = ytareaelement, $\hat{N}$(= $\mathbf{k}$ är en enhetsnormal till ytan D). En anmärkning är att $\mathbf{k}$ är positiv, vilket beror på kryssprodukten $\hat{N} \times d\mathbf{r}$ pekar in till D.

Definition 3. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en C^1-vektorfält. Divergensen av $\mathbf{F}$, vilket betecknas $div(\mathbf{F})$ eller $\nabla \cdot \mathbf{F}$, av vektorfältet ges av $\nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$, då $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$ och $\mathbf{F} = (F_1, ..., F_n)$.

Definition 4. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ett C^1- vektorfält. Rotationen av $\mathbf{F}$, vilket man betecknar $curl(\mathbf{F})$ eller $\nabla \times \mathbf{F}$, är vektorfältet som ges av

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) \tag{18}$$

Anmärkning 2. Om $\mathbf{F}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ så kan vi tänka oss att fältet, $\mathbf{F}$ = (P,Q,0).

Det vill säga om vi nu tar rotationen av fältet ,$\mathbf{F}$, får vi att

$$\nabla \times \mathbf{F} = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\hat{k}, \tag{19}$$

vilket, som vi har sett tidigare, återfinns i Greens sats.

6.1 Stokes Sats

Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1-fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om Y är ett orienterat ytstycke i Ω med en positivt orienterad rand ∂Y så gäller:

$$\oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{N} dS$$

7 Flödesintegraler

7.1 Gauss Divergens sats

Låt $\mathbf{F}$=(F_1, F_2, F_3) vara ett C^1-vektorfält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om det kompakta delområdet $k \subseteq \Omega$ har en rand ∂k som består av en eller flera C^1-ytor och som är orienterat med utåtriktad normal så gäller (där VL är en s.k. flödesintegral):

$$\oiint_{\partial k} \mathbf{F} \cdot dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

7.2 Direkta beräkningar av Flödesintegraler

$\oiint_Y \mathbf{F} \cdot dS$ är formen för en flödesintegral. Flödesintegraler räknar ut "flödet" ut ur eller in i en area. Y måste vara en sluten yta i $\mathbf{R}^3$ och $\hat{N}$ är en normal pekande **utåt** från denna yta för att beräkna flödet ut ur kroppen.

För att göra "en direkt beräkning" av en sådan krävs att en lämplig parametrisering till Y kan tas fram och att en formel för $\hat{N}dS$ finns. Rent allmänt är formeln $Y = \{\mathbf{r}(s,t)|(s,t) \in D \subseteq \mathbb{R}^2\}$ och $\hat{N}dS = \pm(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t})dsdt$. Detta är svårt att beräkna. Det finns dock två specialfall som förenklar beräkningen av flödesintegraler betydligt.

Det första fallet är när en av variablerna kan skrivas som en funktionsyta av de andra två, t.ex. att $z = f(x, y)$. Detta medför att $\hat{N}dS$ kan skrivas om till $\pm(-f_x, -f_y, 1)dxdy$

Det andra fallet är att använda en implicit funktionsyta. Om det existerar en funktion $F(x, y, z)$ så att $F_z \neq 0$ kan $\hat{N}dS$ skrivas som $\pm(\frac{\nabla F}{F_z} dxdy)$.