MVE035/036 - Flervariabelanalys

Sammanfattning läsvecka 7

Grupp 7A
Jesper Buske, buskej@student.chalmers.se
Fredrik Hagström, frehags@student.chalmers.se
Theodor Jendle, jendlet@student.chalmers.se
Toste Skånberg Dahlstedt, toste@student.chalmers.se
Emanuel Slätteby, slatteby@student.chalmers.se
Henrik Zander, zhenrik@student.chalmers.se

8 april 2019

Innehåll

1 Gauss Sats

Gauss sats kopplar flödet av ett fält genom slutna ytor till divergensen av samma fält i volymen som innesluts av ytan.

Sats 1.1. *(Gauss sats). Låt S vara en yta med den utåtriktade normalen $\widehat{N}$ som avgränar volymen V. Låt $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett fält som är C^1 i V. Då gäller att*

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \widehat{N} dS = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} dV. \tag{1}$$

I ord säger alltså Gauss sats att flödet av ett fält $\boldsymbol{F}$ genom en yta S är lika med integralen av fältets divergens över volymen V som innesluts av ytan. Satsen ger ett sätt att beräkna flödesintegraler av fält över ytor som är svåra att parametrisera.

2 Stokes Sats

Definition 2.1. *Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt mängd vars rand ∂D består av en eller flera styckvisa C^1-kurvor som är positivt orienterade. Låt $r : D \mapsto \mathbb{R}^3$ så att $(s,t) \mapsto r(s,t)$ vara en parametriserad yta. Kalla ytan för Y, det vill säga $Y = r(D)$, och sätt $\partial Y = r(\partial D)$. ∂Y sägs då vara positivt orienterad om den ärver sin orientering från ∂D. Y sägs vara ett orienterat ytstycke med orienterad rand ∂Y om:*

- *∂Y ärver sin orientering från ∂D*
- *$\widehat{N} dS = +(\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t}) dsdt$*

Sats 2.2. *(Stokes sats). Låt $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1-fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Om Y är ett orienterat ytstycke i Ω med orienterad rand ∂Y så gäller:*

$$\oint_{\partial Y} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \widehat{N} dS. \tag{2}$$

Uttryckt i ord säger Stokes sats att flödet av rotationen av ett fält $\boldsymbol{F}$ genom en yta Y är lika med arbetet uträttat av fältet längs med ytans rand ∂Y. För specialfallet då $F_3 = 0$ och y ligger i xy-planet får vi Greens sats.

2.1 Samband mellan begreppen virvelfritt och konservativt

Definition 2.3. *Låt $\boldsymbol{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett C^1-vektorfält. $\boldsymbol{F}$ är virvelfritt om:*

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

Definition 2.4. *Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ kallas konservativt i det öppna området Ω om det finns en C^1-funktion U i Ω sådan att:*

$$\boldsymbol{F} = grad(U) \tag{4}$$

Funktionen U kallas då potential till $\boldsymbol{F}$

Sats 2.5. *(Böiers 10.5.3). Om $\boldsymbol{F}$ konservativt i öppna mängden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ med potential $\Phi \in C^2$ gäller att $\boldsymbol{F}$ är virvelfritt.*

Sats 2.6. *(Böiers 10.5.4). Om $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ virvelfritt i öppna enkelt sammanhängande området Ω gäller att $\boldsymbol{F}$ är konservativt.*

Detta kommer sig av att godtycklig γ kan "dras ihop" på ett kontinuerligt vis till en punkt utan att lämna området Ω ty det är enkelt sammanhängande. Låt därefter Y vara ytan som ritas upp vid sådan ihopdragning, dvs Y ligger helt i Ω och $\partial Y = \pm\gamma$. Med hjälp av Stokes sats fås därefter att kurvintegralen $\oint_\gamma \boldsymbol{F} dr = 0$ för varje sluten enkel C^1-kurva i Ω vilket enligt (Böiers 9.4.3) bevisar (Böiers 10.5.4) ovan.

3 Maxwells Ekvationer

Maxwells ekvationer är en uppsättning ekvationer (som kan formuleras både i differential- och integralform) som beskriver elektriska och magnetiska fält. Maxwells första två ekvationer baseras på Gauss sats och är (på differentialform)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \tfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

där $\boldsymbol{E}$ är det elektriska fältet, $\boldsymbol{B}$ är det magnetiska fältet, ρ är elektrisk laddningstäthet och ϵ_0 är permittiviteten i vakuum. Den första av dessa två ekvationer kallas Gauss lag (den andra kallas Gauss lag för magnetism).

3.1 Gauss lag

Betrakta först Coloumbs lag för det elektriska fältet kring en laddning Q

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}. \tag{6}$$

Betrakta sedan en sfär Y med radien R kring denna laddning. Det totala elektriska flödet genom sfären blir

$$\oiint_Y \boldsymbol{E} \cdot \widehat{N} dS = \oiint_Y \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dS \tag{7}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \oiint_Y dS \tag{8}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{9}$$

Detta är Gauss lag på integralform. I ord säger den att det totala elektriska flödet genom en stängd yta är lika med $\frac{1}{\epsilon_0}$ gånger den elektriska nettoladdningen som innesluts av ytan. Om man skriver den i termer av laddningstätheten ρ och en allmän volym K med randen ∂K får man

$$\oiint_{\partial K} \boldsymbol{E} \cdot \widehat{N} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_K \rho dV, \tag{10}$$

Applicerar man Gauss sats på (10) får man $\forall K$

$$\iiint_K \nabla \cdot \boldsymbol{E} dV = \iiint_K \frac{\rho}{\epsilon_0} dV. \tag{11}$$

Detta innebär likheten $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, vilket är Gauss lag på differentialform. I ord säger den att divergensen av det elektriska fältet är lika med laddningstätheten delat med ϵ_0. Det betyder intuitivt att om det finns ett elektriskt flöde genom någon sluten yta så måste det finnas en källa, det vill säga en laddning, innesluten av ytan.

Anmärkning: om man betraktar en punktladdning Q i origo får man elfältet

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \tag{12}$$

för $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, vilket innebär att fältet är singulärt i origo. Beräknar man första komponenten av divergensen av elfältet (andra och tredje komponenten följer samma princip) så får man

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \tag{13}$$

vilket innebär att

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = 0. \tag{14}$$

Detta innebär att Gauss sats till synes fallerar, ty

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oiint_Y \boldsymbol{E} \cdot \widehat{N} dS \neq \iiint_{\mathrm{int(Y)}} \nabla \cdot \boldsymbol{E} dV = 0, \tag{15}$$

där Y är en sfärisk yta runt punktladdningen Q och $\text{int}(Y)$ är volymen som innesluts av Y. Detta är en konsekvens av att $\boldsymbol{E}$ inte är C^1 i punkten $(0,0,0)$, vilket medför att $\nabla \cdot \boldsymbol{E} \neq 0$ där. Detta rättas tillmed hjälp av Diracs deltafunktion så att Gauss lag fortfarande gäller.

3.2 Faradays lag

Maxwells tredje ekvation bygger på Faradays lag, som säger att den inducerade elektromotoriska kraften i en sluten elektrisk ledare är lika med den negativa tidsderivatan av det magnetiska flödet genom den slutna ledaren. Rent matematiskt blir Faradays lag ekvationen (16) då insidan av γ är lika med D.

$$\oint_\gamma \boldsymbol{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_D \boldsymbol{B} \cdot \hat{N} dS \tag{16}$$

Om man applicerar Stokes sats på vänsterledet i (16) får man att arbetsintegralen med avseende på $\boldsymbol{E}$ och γ är lika med flödesintegralen av rotationen av $\boldsymbol{E}$ med avseende på området D, vilket kan ses i ekvation (17). I högerledet på (16) kan vi flytta in derivatan innanför integraltecknet, vilket tillsammans med det nya vänsterledet ger ekvation (18). Då integralerna i (18) är lika och området D kan väljas godtyckligt med avseende på radien, kommer integranderna att vara lika. Detta ger Maxwells tredje ekvation (19).

$$\oint_\gamma \boldsymbol{E} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \hat{N} dS \tag{17}$$

$$\iint_D (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \hat{N} dS = \iint_D -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \hat{N} dS \tag{18}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{19}$$

3.3 Amperes lag

Om man låter en ledare sammanfalla med positiva z-axeln i det tredimensionella rummet så kommer magnetfältet, $\boldsymbol{B}$, att vara proportionellt med högerledet i (20), om strömmen I genom ledaren går i positiv z-riktning. Proportionaliteten kommer att bero på storleken på strömmen I och mediets egenskaper.

$$\boldsymbol{B}(x,y,z) \propto \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right) \tag{20}$$

Om man väljer en sluten kurva γ kring origo (ledaren) i xy-planet så kommer arbetsintegralen med avseende på γ för magnetfältet att vara proportionellt mot 2π. Då $\boldsymbol{B}$ är proportionellt med strömmen och mediet så får vi (21).

$$\oint_\gamma \boldsymbol{B} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \cdot I \cdot c \tag{21}$$

Det är lockande att försöka använda sig av Stokes sats för att skriva om arbetsintegralen för magnetfältet till en flödesintegral med avseende på ytan D som är insidan av γ. Problemet är att $\boldsymbol{B}$ har en singuläritet längs hela z-axeln vilket hindrar oss från att använda Stokes sats. För att kringgå detta definierar vi istället strömtätheten $\boldsymbol{J}$ som är strömmen per areaenhet inklusive dess riktning. Den totala strömmen genom ytan D blir då (22).

$$I = \iint_D \boldsymbol{J} \cdot \hat{z} dS \tag{22}$$

Vi kan nu använda oss av Stokes sats för att skriva om arbetsintegralen av magnetfältet, vilket ger (23).

$$\oint_\gamma \boldsymbol{B} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot \hat{z} dS \tag{23}$$

Ekvation (23) tillsammans med (21) och (22) ger oss uttrycket (24). Då det i (24) är två integraler av samma typ med avseende på samma, godtyckligt stora, område D, så kommer integranderna att vara lika med varandra. Detta är Ampères lag (25), där μ är den magnetiska permeabiliteten hos mediet.

$$\iint_D 2\pi c \boldsymbol{J} \cdot \hat{z} dS = \iint_D (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot \hat{z} dS \tag{24}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = 2\pi c \boldsymbol{J} = \mu \boldsymbol{J} \tag{25}$$

Problemet med Ampères lag är att den inte tar hänsyn till de andra av Maxwells ekvationer. Ampères lag håller till exempel inte om man studerar magnetfältet över en kapacitans, då ingen ström passera mellan dess plattor. För att få Maxwells fjärde lag måste man alltså korregera Ampères lag. Maxwells fjärde lag är (26), där ε är den elektriska permittiviteten och $\boldsymbol{E}$ det elektriska fältet.

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{26}$$

4 Laplacian

Definition 4.1. *Låt* $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *vara ett* C^1*-vektorfält. Laplacianen av* $\boldsymbol{F}$ *ges av:*

$$\Delta \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial {x_i}^2} \boldsymbol{F} \tag{27}$$

Notera att $\Delta = \nabla^2$.

5 Räknesatser för nablaräkning

Nedan regler gäller så länge (F) är en tillräckligt snäll funktion.

Sats 5.1. *g)* $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0$

Satsen säger att om $\boldsymbol{F}$ är ett godtyckligt C^2-fält så är curl($\boldsymbol{F}$) ett källfritt fält. Motsatsen, dvs att om $\boldsymbol{F}$ är ett källfält finns ett fält $\boldsymbol{A}$ sådant att $\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{A}$, gäller under vissa villkor. $\boldsymbol{A}$ kallas *vektorpotential* till $\boldsymbol{F}$.

Sats 5.2. *h)* $\nabla \times (\nabla \Phi) = \boldsymbol{0}$

Bevis omfattar bland annat det faktum att $\boldsymbol{F}$ är konservativ och alltså virvelfritt då $\Phi \in C^2$.

Sats 5.3. *i)* $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}$

där $\boldsymbol{F} \in C^2$.

Eftersom båda led är vektorfält räcker det att bevisa att de är lika i varje komponent. Om man därefter skriver om ∇ som differentialer kommer såväl VL som HL att ta ut varandra och därmed vara lika varandra, enligt Clairaut.

6 Optimeringsproblem i flera variabler

Hur man räknar ut kritiska punkter för en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ både i en kompakt och icke-kompakt mängd.

6.1 En variabel

Sats 6.1. *En kontinuerlig funktion på en slutet och begränsat intervall antar ett största/minsta värde.*

Sats 6.2. *Om den deriverbara funktionen $f(x)$ har ett lokalt max/min i $x = a$ så är $f\,'(a) = 0$.*

Sats 6.3. *(Sats 6.1 + 6.2) Om f är en deriverbar funktion på $[a, b]$ så kommer f att anta sina extremvärden för $[a, b]$ antingen i en kritisk punkt eller i en ändpunkt.*

Lösningsmetod:

1. Ta fram alla extrempunkter till f genom att lösa $f\ (x) = 0$ och beräkna de kritiska punkternas värde.
2. Ta ut det största och minsta värdet vilket motsvarar de största och minsta värden i intervallet $[a, b]$.

6.2 Flera variabler (kompakt)

Sats 6.4. *Sats 6.1 gäller även i $\mathbb{R}^n$, fast för kompakt mängd, istället för slutet och begränsat intervall.*

Sats 6.5. *Om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ är C^1 då gäller i en extrempunkt att $\nabla F = \vec{0}$*

Sats 6.6. *(Sats 6.4 + 6.5) Om $f \subseteq C^1(\Omega)$ för någon öppen Ω som en delmängd av $\mathbb{R}^n$ och K är en kompakt delmängd till Ω så antar f både ett största och minsta värde i K och dessa antas antingen i en kritisk punkt till f eller på randen till K.*

Lösningsmetod:

1. Bestäm alla kritiska punkter till f genom att lösa systemet $\nabla F = \vec{0}$ av n ekvationer i n obekanta. Tag med endast de kritiska punkter som tillhör K och beräkna f:s värde i alla dessa.
2. Vi förutsätter att randen är styckvis C^1 för varje stycke välj en C^1 parametrisering med $n-1$ variabler säg $\pi(s_1, s_2, ..., s_{n-1}) = F(\pi(s_1, s_2, ..., s_{n-1})$ betrakta den sammansatta funktionen F.
3. Repetera tills löst.

6.3 Flera variabler (icke-kompakt)

Motsatt till en kompakt mängd måste inte en icke kompakt mängd anta ett största eller minsta värde, då den kan gå mot oändligheten.

Det typiska lösningen är att det går att skapa en kompakt mängd som innehåller antingen max eller min eller båda. Efter detta tillämpar man metoderna som man gör i en kompakt mängd.

6.4 Be Smart!

I andra delen av föreläsningen gavs tips på hur man kan lösa problem genom att skippa vissa uträkningar. Be smart!

Exempel på Be smart:

1. Bråk $\rightarrow$ kan man ofta snabbt se vilka parametrar som ska anta sitt största, minsta eller 0 värde för att få ut max och min värden
2. Funktioner med växande eller avtagande termer $\rightarrow$ kommer max/min vara på randen.
3. Använda sig av rätt parametrisering, vilket exempelvis är polära koordinater eller rymdpolära vid cirklar, ellipser eller sfärer