MVE035- Sammanfattning av lv7

Anna Nguyen, Natalie Friedman,
Vicky Che, Øyvind Hjermstad,
Anton Styrefors Sparby

March 2019

1 Gauss Sats

Låt $\mathbf{F}$=(F_1, F_2, F_3) vara ett C^1-fält definerat i en öppen mängd Ω i rummet. Om det kompakta området $\mathbf{K} \subset \Omega$ har en rand ∂K som består av en eller flera C^1-ytor och som är orienterad med utåtriktad normal så gäller att:

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \; dS = \iiint_K \nabla \mathbf{F} \cdot dV \tag{1}$$

Bevis. Först gör vi en uppdelning:

$$(F_1, F_2, F_3) = (F_1, 0, 0) + (0, F_2, 0) + (0, 0, F_3) \tag{2}$$

Då delade vi upp beviset till tre delar. Antag att **K** regulärt m.a.p z

$$\mathbf{K} = \left\{ (x, y) \in D \subseteq \mathbf{R}^2 \; och \; f\,(x, y) \leq z \leq g\,(x, y) \right\} \tag{3}$$

under denna förutsättning visar vi att

$$\oiint_{\partial K} (0, 0, F_3) \cdot \hat{\mathbf{N}} \; ds = \iiint_K \frac{\partial F_3}{\partial z} \; dxdydz \tag{4}$$

<u>Högerled</u>: Beräknar med Fubini Sats får vi :

$$= \iint_D dxdy \int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} \; dz \tag{5}$$

<u>Vänsterled</u>: På den del av ytan som går runt z-axeln så är $\hat{\mathbf{N}}$ horisontell (Ingen z-komponent), vilken innebär att $(0, 0, F_3) \cdot \hat{\mathbf{N}} \; ds = 0$. Då behöver man bara beräknar med den andra två ytor:

$$\oiint_{\partial K} (0, 0, F_3)\, \hat{\mathbf{N}} \; ds = \iint_{Topp(\boldsymbol{z}=g(x,y))} (0, 0, F_3)\, \hat{\mathbf{N}} \; ds + \iint_{Botten(\boldsymbol{z}=f(x,y))} (0, 0, F_3)\, \hat{\mathbf{N}} \; ds \tag{6}$$

<u>Topp</u>: Efter som *Flöde ut* $\Rightarrow +$:

$$\iint_{\pi(Topp)} F_3 \; dxdy = \iint_D F_3\,(x, y, g\,(x, y)) \;\; dxdy \tag{7}$$

<u>Botten</u>: Efter som *Flöde ut* $\Rightarrow -$:

$$\iint_{\pi(Bott)} F_3 \; dxdy = -\iint_D F_3\,(x, y, f\,(x, y)) \;\; dxdy \tag{8}$$

Summan av Vänsterled är lika med högerled. Sedan gör man samma stegar på $(0, F_2, 0)$ och $(F_1, 0, 0)$. Så om K är <u>regulärt</u> d.v.s kan partitioneras på alla tre sätt då gäller Gauss Sats.

□

2 Stokes Sats

Stokes sats liknar Greens formel men skillnaden mellan de två är att Stokes sats är definierad i R^3, där området är en yta.

Sats 2.1. *Låt* $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ *vara ett* C^1*-fält, definierat i en öppen mängd* Ω *i rummet. Om* $\mathbf{Y}$ *är ett orienterad ytstycke i* Ω *med orienterad randstycke* ∂Y *så gäller:*

$$\oint_{\partial Y} \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r} = \iint_Y (\nabla \times \boldsymbol{F}) \bullet \hat{N} dS \tag{9}$$

Antag att den orienterade C^1-ytan har parametriseringen

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s,t) \qquad s,t \in D \tag{10}$$

$\mathbf{D}$ är en kompakt mängd av s,t-planet med positivt orienterad rand ∂D. $\mathbf{Y}$ kan uppfattas som bilden av $\mathbf{D}$ under avbildningen $(s,t) \mapsto \mathbf{r}(s,t)$. $\mathbf{Y}$ sägs vara ett orienterad ytstycke med orienterad rand ∂D om:

- ∂Y ärver dess orientering från ∂D
- $\hat{N} dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right) dsdt$

Där normalvektorn ska peka i en riktning beroende på dess orientering och $\hat{N} \times d\mathbf{r}$ ska peka in mot $\mathbf{Y}$. Vi har ett specialfall där $\mathbf{F}_3 = 0$ och $\mathbf{Y}$ ligger i xy-planet, då får vi helt enkelt Greens formel. Om $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ och $\mathbf{F} = (P, Q, 0)$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \tag{11}$$

Bevis. Man kan bevisa satsen för en yta $\mathbf{Y}$ som är en del av en C^2-funktionsyta. $\mathbf{Y}$ kan delas upp i delar, där varje del är en funktionsyta. Vid addition av resultaten för kurvintegralerna kommer de att ta ut varandra och kvar finns bara integralen över den ursprungliga randen. På så sätt räcker det med att bevisa satsen för en av delarna.

$$Y = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D \subseteq R^2, f \in C^2\} \tag{12}$$

<u>Vänsterled</u>:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial Y} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \oint_{\partial Y} (F_1 dx, F_2 dy, F_3 dz) \\
&= \oint_{\partial D} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] dxdy \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \right] dxdy
\end{aligned} \tag{13}$$

Vi har övergått från xy-planet till att integrera mellan parameterplanet s och t. Vidare används både kedjeregeln för funktionsytan och Greens sats.
Högerled

$$\iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \hat{N} dS \qquad z = f(x,y) \tag{14}$$

$$\hat{N} dS = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \tag{15}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \tag{16}$$

Integranden stämmer överens med (13). Beviset är därmed klart. $\square$

3 Maxwells Ekvationer

Maxwells Ekvationer är ekvationer som beskriver elektriska och magnetiska fält. De är en grupp av fyra partiella differentialekvatoiner som var sammanställda av Maxwell med hjälp av Stokes och Gauss satser.

3.1 Maxwells Första Ekvation

Den första ekvationer är Gauss lag som är en tillämpning av Gauss sats, den beskriver det flödet genom ett område där det integrerade området är proportionelt mot de inneslutna källornas eller sänkornas styrka. ρ =ladningens densitet

$$\oiint_{\partial K} \mathbf{E} \bullet \hat{N} dS = \iiint_K \nabla \bullet \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon} \iiint_K \rho dV = \iiint_K \frac{\rho}{\varepsilon} dV \rightarrow \nabla \bullet \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{17}$$

3.2 Maxwellls Andra Ekvation

Den andra ekvationen är en tillämpning av Gauss lag för magnetiska fält. I tillämpning för magnetiska fält då enligt samma steg med hjäp av Gauss lag så får man ekvationen.

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = 0 \tag{18}$$

Den här ekvation bevisar att det inte finns någon magnetisk monopol då det finns både en källa och sänka inom ett slutet godtyckligt område som innehåller en magnet.

3.3 Maxwells Tredje Ekvation

Den tredje ekvationen kallas Faradays lag vilken är en tillämpning av Stokes sats. Fysikaliskt beskriver Faradays lag att i en sluten elektrisk ledare, som befinner sig i ett tidsvarierande magnetfält, induceras en elektromotorisk kraft denna elektromotoriska kraften är lika med tidsderivatan av det magnetiska flödet

$$\oint_\gamma \mathbf{E} \bullet d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{E}) \bullet \hat{N} dS = \frac{-\partial}{\partial t} \iint_D \mathbf{B} \bullet \hat{N} dS = \iint_D \frac{-\partial \mathbf{B}}{\partial t} \bullet \hat{N} dS \rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = \frac{-\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{19}$$

3.4 Maxwells Fjärde Ekvation

Den fjärde ekvationen kallas Amperes Lag vilken är en tillämpning av Stokes sats som bestämmer relationen mellan det magnetiska fältet omkring en ledning på grund av ström flödet i den oslutna ledningen. Ström flödet genom ledningen beskrivs av av flödet per areaenhet $\mathbf{J}$ gånger $2\pi c$ där c beror på materialt av ledningen.

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \bullet d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{B}) \bullet \hat{k} dS = 2\pi c \iint_D \mathbf{J} \bullet \hat{k} dS \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = 2\pi c \mathbf{J} \rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \tag{20}$$

Den här ekvationen måste få en extra term för den omodifierade ekvationen gäller bara i magnetostatiska situationer så extratermen måste tilläggas så Maxwells fjärde ekvation är på formen nedan.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{21}$$

3.5 Maxwells Ekvationer Sammanfattning

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{22}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = 0 \tag{23}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{-\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{24}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{25}$$

Betrakta den situationen då Maxwells ekvationer tillämpas i ett vakuum.

Bevis.

$$\rho \equiv 0, \mathbf{J} \equiv 0, \varepsilon = \varepsilon_o \approx 8.854 \times 10^{-12} Fm^{-1}, \mu \approx 4\pi \times 10^{-7} NA^{-2} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla \times (\frac{-\partial \mathbf{B}}{\partial t}) \\ &= \frac{-\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= \frac{-\partial}{\partial t} (\mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \\ &= -\mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{27}$$

$$-\triangle \mathbf{E} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} \approx 2.998 \times 10^8 ms^{-1}$$

□

Det här är bevis att elektromagnetiskavågor är ljusvågor och ljusvågor är elektromagnetiska vågor som är en superposition.

4 Nablaräkning

Derivationsoperatorerna $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ och $\frac{\partial}{\partial x_3}$ kan sammanfattas till en vektoriell derivationsoperator som kallas för nablaoperatorn.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \tag{28}$$

När nablaoperatorn verkar på en skalär funktion f få man *gradienten* av f.

$$\text{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \tag{29}$$

Nablaoperaton bildar även *divergensen* och *rotationen* av ett vektorfält $\mathbf{F}$.

$$\text{div}\mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \tag{30}$$

$$\text{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \tag{31}$$

Laplaceoperatorn ges av

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{32}$$

Definition 4.1. Ett C^1 fält $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ kallas källfritt om $\nabla \bullet \mathbf{F} = 0$

Sats 4.1. *För ett godtyckligt C^2-fält $\boldsymbol{F}$ gäller*

$$\nabla \bullet (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0 \tag{33}$$

Ur detta följer att $\nabla \times \boldsymbol{F}$ är ett källfritt fält.

Bevis.

$$\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \times \mathbf{F})_1 + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \times \mathbf{F})_2 + \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \times \mathbf{F})_3$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Vidare gäller

$$= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} = 0$$

enligt Clairauts sats. □

Sats 4.2. *Låt $\boldsymbol{F}$ vara ett C^1 potentialfält, $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ så är $\boldsymbol{F}$ virvelfritt, alltså $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$. Ersätts $\boldsymbol{F}$ med ett godtyckligt C^2 skalärfält ϕ kan följande bevisas*

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \boldsymbol{0} \tag{34}$$

Bevis.

$$\nabla \times (\nabla\phi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial yx} \right) = (0,0,0) = \mathbf{0} \tag{35}$$

Enligt Clairauts sats om blandade partiella derivator. □

Sats 4.3. *För ett godtyckligt C^2-fält $\boldsymbol{F}$ gäller*

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla \bullet \boldsymbol{F}) - \Delta\boldsymbol{F} \tag{36}$$

Bevis. Eftersom båda leden är vektorfält, räcker det att visa att de är lika i varje komponent. Vi gör beviset för första komponenten:

Vänsterled

$$\begin{aligned}(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}))_1 &= \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \times \mathbf{F})_3 - \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \times \mathbf{F})_2 \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z\partial x}\end{aligned}$$

Högerled

$$\begin{aligned}(\nabla(\nabla \bullet \mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F})_1 &= \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \bullet \mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F}_1 \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right) \\ &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Slutligen kan vi med hjälp av Clairauts sats visa att

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z\partial x} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x\partial z}$$

och därmed även $(VL)_1 = (HL)_1$ □

5 Optimering

Optimering handlar om att finna funktionens globala max och/eller min i definitionsmängden.

5.1 Optimering på kompakta områden

Sats 5.1. *Om det följande gäller för en reellvärd funktion f definierad på mängden K:*

1. *K är en kompakt mängd (sluten och begränsat)*
2. *funktionen f är kontinuerlig på K.*

Då antar f ett största och minsta värde på K.

Sats 5.2. *Om f är en kontinuerlig och reellvärd funktion definierad på en kompakt mängd K. Då antar f maximum och minimum i kritiska punkter i det inre av K eller på randen.*

Optimering av en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd i n dimensioner kan göras efter följande recept:

1. Bestäm alla kritiska punkt för f i det inre av K genom att lösa $\nabla f = 0$.
2. Parametrisera randen av K med $n - 1$ variabler och upprep steg 1 och 2 med randen tills dess randen kan parametriseras i en variabel. Bestäm största och minsta värde på denna.
3. Jämför funktionsvärden i kandidatpunkterna och bestäm största och minsta värde.

5.2 Optimering på icke-kompakta områden

För optimering på icke-kompakta mängder måsta man argumentera för att max och/eller min antas i en kompakt delmängd av områden för att reducera problemet till ett optimeringsproblem på en kompakt mängd.