Tavelpresentation grupp 7D-1

Edvin Johansson, Kalle Svensson, Daniel Mannerskog,
Erik Jansson, Carl Larsson, Mats Kiil Gunleiksrud

April 2019

1 Optimering

1.1 Optimering på kompakta områden

Vi börjar med en påminnelse om fallet i en variabel. Givet en kontinuerlig funktion $f(x)$ är uppgiften att bestämma det största och minsta värde som f antar på ett givet slutet intervall $[a, b]$. I detta fall finns det två satser, Sats 1 säger att en kontinuerlig funktion antar både ett största och ett minsta värde på kompakta mängder och Sats 2 säger att om den deriverbara funktionen $f(x)$ har lokalt maximum eller minimum i $x = a$ gäller att $f'(a) = 0$. Kombinerar man dessa satser får man att om f är deriverbar på (a, b) antar f sina extremvärden för $[a, b]$ antingen i en kritisk punkt eller i en ändpunkt. Utvidgar man detta till flera variabler finner man att Sats 1 även gäller i $\mathbf{R}^n$ medan Sats 2 behöver omformuleras. Sats 2 i $\mathbf{R}^n$ lyder att om $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ är en C^1-funktion gäller det att $\nabla f = 0$ i lokala extrempunkter. Kombinerar man dessa satser får man att om $f \in C^1(\Omega)$ för någon öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ och K är en kompakt delmängd till Ω antar f både största och minsta värde i K. Dessa antas antingen i en kritisk punkt till f eller på randen ∂K. Givet detta kan vi ställa upp en rekursiv algoritm för bestämmandet av största och minsta värden.

Rekursiv algoritm

1. Bestäm alla kritiska punkter till f genom att lösa ekvationssystemet $\nabla f = \mathbf{0}$. Tag endast med de kritiska punkter som tillhör K.

2. Vi förutsätter att ∂K är styckvis C^1. För varje stycke välj en C^1-parametrisering med $n - 1$ variabler, säg $\mathbf{r}(s_1, ..., s_{n-1})$. Betrakta den sammansatta funktionen $f(s_1, ..., s_{n-1}) = f(\mathbf{r}(s_1, ..., s_n))$. Gå tillbaka till steg 1 och upprepa tills ett optimeringsproblem i en variabel uppstår.

3. Beräkna funktionsvärdena i alla kandidatpunkter och plocka ut det största och det minsta.

1.2 Optimering på icke-kompakta områden

På ett icke-kompakt område D finns det ingen garanti på att en given kontinuerlig funktion f antar ett största eller minsta värde. Dock är det vanligt att man kan argumentera för att maximum och minimum faktiskt antas på någon kompakt delmängd av D. Det mest typiska fallet är då man har en kontinuerlig funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ och att man vet att:

1. $\exists \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{a}) > 0$

2. $\exists \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{b}) < 0$

3. $lim_{\|\mathbf{x}\| \to \infty} f(\mathbf{x}) = 0$.

Med detta vet man att f antar största och minsta värde.

1.2.1 Bevis

Punkt 3 ger att det finns ett $R > 0$ sådant att $\|\mathbf{x}\| < R \Rightarrow |f(\mathbf{x})| < min\{|f(\mathbf{a})|, |f(\mathbf{b})|\}$, vilket innebär att f antar största och minsta värde på den kompakta cirkelskivan $\|\mathbf{x}\| \leq R$.

2 Nablaräkning

Operatorn ∇ är en differentialoperator för vektorer och är i $\mathbf{R}^3$ definierad enligt

$$\nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big). \tag{1}$$

Operatorn kan betraktas som en vektor i avseendet att den följer många av samma räkneregler vid motsvarigheterna till multiplikation med skalär, skalärprodukt och kryssprodukt; gradient, divergens samt curl. Detta kan åskådliggöras genom att betrakta nablaoperatorns applikation på funktionen $f(x, y, z) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ samt $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ där

$$grad(f) = \nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big) \tag{2}$$

$$div(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\Big) \tag{3}$$

$$curl(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big). \tag{4}$$

Ett ytterligare exempel på nablaoperatorns likhet med en tredimensionell vektor är att $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ förutsatt att $\mathbf{F}$ är av klass C^2 . Detta kräver dock en explicit uträkning då nablaoperatorn inte är en vektor varför ortogonalitetsargument saknar mening. Användning av defninitionerna för divergens och curl ger dock

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla \cdot \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) \\
&= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Kravet att $\mathbf{F}$ är av klass C^2 är nödvändigt för den sista likheten.

3 Gauss divergenssats

Låt $\boldsymbol{F}$=(F_1, F_2, F_3) vara ett C^1-fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$. Om det kompakta området $K \subseteq \Omega$ har en rand ∂K som består av en eller flera C^1-ytor och som är orienterad med utåtriktad normal gäller att

$$\oiint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} dV. \tag{6}$$

3.1 Bevis av Gauss divergenssats

Beviset delas upp i tre steg, som liknar stegen i beviset för Greens sats.

Steg 1

Antag att K är reguljärt med avseende på z, det vill säga $K = \{(x, y, z)|(x, y) \in D \subseteq \mathbf{R}^2, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$, där f och g är C^1-funktioner. Under denna förutsättning visar vi att

$$\oiint\limits_{\partial K}(0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = \iiint\limits_{K} \frac{\partial F_3}{\partial z} dxdydz. \tag{7}$$

Betrakta nu högerledet i ekvation (7). Fubinis sats ger att det kan skrivas om som

$$\iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz = \iint\limits_{D} (F_3(x, y, g(x, y)) - F_3(x, y, f(x, y)))dxdy. \tag{8}$$

Betrakta nu i stället vänsterledet i ekvation (7). Notera att $\hat{N}$ går rakt i horisontalled, det vill säga inte har någon z-komponent på den del av ytan K som "går runt" z-axeln. Detta ger oss att

$$\oiint\limits_{\partial K}(0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = \iint\limits_{toppen} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS + \iint\limits_{botten} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS, \tag{9}$$

där det med toppen och botten menas funktionsytorna $z = g(x, y)$ respektive $z = f(x, y)$. För $z = g(x, y)$ fås att $\hat{N} dS = (-g_x, -g_y, 1)dxdy$, eftersom det är flödet ut som beräknas. Detta ger att

$$\iint\limits_{toppen} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = \iint\limits_{\Pi(toppen)} F_3 dxdy = \iint\limits_{D} F_3(x, y, g(x, y))dxdy. \tag{10}$$

För $z = f(x, y)$ får vi, på liknande vis, att $\hat{N} dS = (f_x, f_y, -1)dxdy$, eftersom det är flödet ut som söks. Detta ger att

$$\iint\limits_{botten} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = -\iint\limits_{\Pi(botten)} F_3 dxdy = -\iint\limits_{D} F_3(x, y, f(x, y))dxdy. \tag{11}$$

Adderar vi nu dessa två delresultat får vi $\iint\limits_{D}(F_3(x, y, g(x, y)) - F_3(x, y, g(x, y)))dxdy$, vilket är precis högerledet i ekvation (8), vilket visar att ekvation (7) gäller.

Steg 2

Antag att K kan partitioneras i ändligt många områden som i steg 1, kalla dessa för $K_1, \ldots, K_n$. För varje $i = 1, \ldots, n$ gäller att $\oiint\limits_{\partial K_i} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = \iiint\limits_{K_i} \frac{\partial F_3}{\partial z} dV$. Genom att nu summera över $i = 1, \ldots, n$, får vi att

$$\sum_{i=1}^{n} \iiint\limits_{K_i} \frac{\partial F_3}{\partial z} dV = \iiint\limits_{K} \frac{\partial F_3}{\partial z} dV. \tag{12}$$

Men gäller det att $\sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\partial K_i} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS = \iint\limits_{\partial K} (0, 0, F_3) \cdot \hat{N} dS$? Svaret på den frågan är ja ty varje inre sida integreras över en gång åt ena hållet och en gång åt motsatt håll, vilket ger att de kancelleras och endast integralen över ∂K blir kvar.

Steg 3

På samma sätt, om K kan partitioneras i ändligt många delar som är reguljära med avseende på y får vi att

$$\oiint\limits_{\partial K}(0, F_2, 0) \cdot \hat{N} dS = \iiint\limits_{K} \frac{\partial F_2}{\partial y} dV \tag{13}$$

och om K kan partitioneras i ändligt många delar som är reguljära med avseende på x får vi att

$$\mathop{\vphantom{\int}\rlap{\;\;\bigcirc}\iint}_{\partial K}(F_1,0,0)\cdot\hat{N}dS=\iiint_K\frac{\partial F_1}{\partial x}dV. \tag{14}$$

Så om K är reguljärt, det vill säga kan partitioneras på alla tre sätt, kan vi genom addition få att

$$\mathop{\vphantom{\int}\rlap{\;\;\bigcirc}\iint}_{\partial K}\mathbf{F}\cdot\hat{N}dS=\iiint_K\nabla\cdot\mathbf{F}dV,$$

vilket är precis ekvation (6), vilket skulle bevisas.

4 Stokes sats

För att använda Stokes sats behöver vi först definiera ett nytt begrepp för att satsen ska vara stringent.

4.1 Definition av orienterat ytstycke

Låt $D\subseteq\mathbf{R}^2$ vara en kompakt mängd vars rand ∂D består av en eller flera styckvis C^1-kurvor som är positivt orienterade. Låt $\boldsymbol{r}(s,t):D\to\mathbf{R}^3$ där $(s,t)\mapsto\boldsymbol{r}$ vara en parametriserad yta. Kalla ytan för Y, dvs $Y=\boldsymbol{r}(D)$. Sätt $\partial Y=\boldsymbol{r}(\partial D)$. ∂Y sägs vara (positivt) orienterat om den ärver dess orientering från ∂D. Y sägs vara ett orienterat ytstycke med orienterad rand ∂Y om:

- ∂Y ärver dess orientering från ∂D
- $\hat{N}dS=+\,(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t})dsdt$

När man senare använder Stokes sats så är tumregeln för att få rätt riktning på normalvektorn till ytan att $\hat{N}\times d\boldsymbol{r}$ alltid ska vara riktad in mot ytan, där $d\boldsymbol{r}$ är i tangentens riktning längs ∂Y.

4.2 Formulering av Stokes sats

Låt $\boldsymbol{F}=(F_1,F_2,F_3)$ vara ett C^1-fält definierat i en öppen mängd $\Omega\subseteq\mathbf{R}^3$. Om Y är ett orienterat ytstycke i ω med (positivt) orienterad rand ∂Y så gäller

$$\oint_{\partial Y}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_Y(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\hat{N}dS.$$

4.3 Bevis av Stokes sats

Vi bevisar satsen endast för en yta Y som är en del av en C^2-funktionsyta, dvs.

$$Y=\left\{(x,y,f(x,y))\;\middle|\;(x,y)\in D\subseteq\mathbf{R}^2,\;f\in C^2\right\}$$

$$\begin{aligned}
\text{VL}=\oint_{\partial Y}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}&=\oint_{\partial Y}(F_1,F_2,F_3)\cdot(dx,dy,dz)=\oint_{\partial Y}F_1dx+F_2dy+F_3dz=\\
=\left\{\substack{\text{Använd funktionsytans}\\\text{egenskaper och kedjeregeln}}\right\}&=\oint_{\pi(\partial Y)=\partial D}F_1dx+F_2dy+F_3\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)=\\
&=\oint_{\partial D}\left(F_1+F_3\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx+\left(F_2+F_3\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy=\\
=\{\text{Använd Greens formel}\}&=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(F_2+F_3\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(F_1+F_3\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]dxdy
\end{aligned}$$

Var försiktig under utvecklingen med kedjeregeln. Vi har:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F_2 + F_3\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}F_2 + \frac{\partial}{\partial x}F_3\frac{\partial f}{\partial y} + F_3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =$$
$$= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + F_3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

På samma sätt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(F_1 + F_3\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) + F_3\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Utför nu subtraktionen. Då $f \in C^2$ gäller Clairauts sats och de termer med både f_x och f_y kancellerar varandra. Resultatet blir således att:

$$\text{VL} = \iint_D \left[-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right] dxdy$$

Låt oss nu betrakta HL $= \iint_Y (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \hat{N} dS$. Vi kan här enkelt bestämma $\hat{N} dS = +(-f_x, -f_y, 1)dxdy$ enligt formeln för normalvektor till en funktionsyta. Skriver vi ut vad $curl(\boldsymbol{F})$ är samt genomför skalärmultiplikationen $(\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \hat{N} dS$ får vi:

$$\text{HL} = \iint_D \left[-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right] dxdy = \text{VL}$$

HL är lika med VL och beviset är därmed slutfört.

5 Potentialer

Definition: *Om $\boldsymbol{F} = \nabla U$ för någon funktion U så kallas U för en potential till $\boldsymbol{F}$ och $\boldsymbol{F}$ kallas ett potentialfält.*

I ett potentialfält är kurvintegralen längs varje sluten kurva i $\mathbf{R}^3$ lika med 0 vilket leder till likheten

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = U(\boldsymbol{b}) - U(\boldsymbol{a})$$

där $\boldsymbol{a}$ är kurvans startpunkt och $\boldsymbol{b}$ är kurvans slutpunkt. Ett C^1-potentialfält $\boldsymbol{F}$ är virvelfritt, det vill säga $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, i hela definitionsmängden.

För att ett vektorfält ska ha en potential krävs alltså att

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot dr = \boldsymbol{0}$$

för varje enkel sluten kurva i definitionsmängden.

6 Maxwells ekvationer

Med Maxwells ekvationer menar man de ekvationer som binder samman elektriska fält och magnetiska fält. Dessa ekvationer är

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{15}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{16}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{17}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{j} + \mu\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{18}$$

där ε och μ är en permittivitetskonstant respektive permeabilitetskonstant vilka beror på mediet fältet färdas genom, $\boldsymbol{j}$ är strömtätheten (A/m^2) och ρ är laddningsdensiteten (C/m^3). De första två ekvationerna (15) (16) härleds med hjälp av Gauss divergensats och de andra två (17) (18) med hjälp av Stokes sats.

6.1 Första och andra ekvationen

Ett elektriskt fält runt en punktladdning kan beskrivas som $\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}$ där Q är dess laddning, r längden bort ifrån laddningen. Då kan flödet ut ur en sfär med just denna radie r beskrivas med

$$\oiint_{\partial K} \boldsymbol{E} \cdot \hat{N} dS = \oiint_{\partial K} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \hat{r} \cdot \hat{r} dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \oiint_{\partial K} dS = \frac{Q}{\varepsilon}, \tag{19}$$

där $\hat{N} = \hat{r}$ då rikting ut ur sfären är bortifrån laddningen. Den sista integralen är mantelarean av sfären som då är $4\pi r^2$. Denna ekvationen gäller även med en godtycklig kropp med en utspridd laddning så länge den är sluten och begränsad, där Q då blir summan av alla laddningar. Vidare kan man med hjälp av Gauss sats skriva flödesintegralen som

$$\iiint_K \nabla \cdot \boldsymbol{E} dV = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_K \rho dV, \tag{20}$$

vilket utan integraltecknet ger oss Maxwells första ekvation (15). Maxwells andra ekvation följer direkt utav att ett magnetiskt fälts riktning är ortogonal emot $\hat{r}$, flödesintegralen blir då noll som då också blir integralen av divergensen över kroppen.

6.2 Tredje och fjärde ekvationen

Maxwells tredje ekvation kommer ifrån hur en förändring av ett magnetiskt fält ger upphov till ett elektriskt fält. Tänk dig en magnet som åker igenom en spole. Faradays induktionslag ger att

$$\oint_{\partial Y} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_Y \boldsymbol{B} \cdot \hat{N} dS. \tag{21}$$

Vänsterledet kan sedan skrivas om med hjälp av Stokes sats samt att derivatan utanför integralen i högerledet är det samma som derivatan inuti integralen i detta fall. Detta ger oss då

$$\iint_Y (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \hat{N} dS = \iint_Y -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \hat{N} dS \tag{22}$$

som utan integraltecknet ger oss Maxwells tredje ekvation (17).

Maxwells fjärde ekvation är den mest komplicerade. Om vi börjar med att betrakta ström genom en ledare som går i positiv z-riktning. Magnetfältet kan beskrivas med hjälp av integralen

$$\oint_{\partial Y} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \mu I, \tag{23}$$

där Y är en cirkelskiva ortogonal mot strömmen. Denna integral är då proportionell emot strömen I genom ledaren. Strömmen kan skrivas som en integral av strömmar med hjälp av strömtätheten $\boldsymbol{j}$ samt så kan integralen skrivas om med hjälp av Stokes sats och vi får

$$\iint_Y (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot \hat{N} dS = \iint_Y \mu \boldsymbol{j} \cdot \hat{z} dS \tag{24}$$

där $\hat{N} = \hat{z}$ som leder till ekvationen

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{j}. \tag{25}$$

Detta liknar Maxwells fjärde ekvation men saknar termen $\mu\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$. Denna missade term var det Maxwell som teoretiskt kom fram till då konstanterna μ och ε är ytterst små vilket gör det svårt att göra mätningar för att visa sambandet. Dock krävs denna term för att förhindra att energiprincipen bryts.