

MVE036, VT-19: FÖRELÄSNING 3

3. DIRACS DELTA”FUNKTION”

Våra mål i detta kapitel är i tur och ordning följande:

1. Att formellt definiera den s.k. *Dirac- δ distributionen* i $\mathbb{R}$.
2. Att förklara intuitivt varför det borde gå att tolka om Dirac- δ som en *sannolikhetsfördelning* eller, mer precis, ett *sannolikhetsmått*.
3. Att formellt definiera Dirac- δ som sådant också.

Presentationen som följer har två bredare mål:

A. Att sätta in saker i en bredare kontext genom att ge formella definitioner av begreppen *distribution* resp. *sannolikhetsmått*.

B. Att bekanta sig med de informella skrivsätten och språket som i synnerhet fysiker brukar använda i dessa sammanhang. Jag kommer därför att använda följande akronymer:

AON = abuse of notation

AOT = abuse of terminology.

Den första AOT är just när man säger Dirac- δ ”funktionen”, ty Dirac- δ är *inte* en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Den kan definieras rigoröst som antingen en distribution eller ett sannolikhetsmått, och således också rent formellt som en funktion, men med en helt annan definitionsomängd i så fall.

3.1. Distributioner. Vi fokuserar på det endimensionella fallet för enkelhetens skull. Det är lätt att generalisera hela diskussionen som följer till godtyckliga dimensioner, men den intresserade läsaren kan i stället ta kursen MMA130: *Distributionsteori* någon gång.

Definition 3.1. Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktions. *Stödet* av f ges av

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}.$$

$\text{Supp}(f)$ är alltså per definition en sluten delmängd till $\mathbb{R}$ och $f(x) = 0$ då $x \notin \text{supp}(f)$.

Definition 3.2. En funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sägs ha *kompakt stöd* om $\text{supp}(f)$ är en begränsad mängd.

Definition/Notation 3.3. Man sätter

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ har kompakt stöd}\}$$

$$C^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ är oändligt deriverbar}\}$$

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) = C_0(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ har kompakt stöd och är oändligt deriverbar}\}.$$

$C_0^\infty(\mathbb{R})$ kallas för mängden av *testfunktioner*. Notera att det är ett vektorrum, dvs sluten under punktvis addition och skalärmultiplikation av funktioner.

Proposition 3.4. $C_0^\infty(\mathbb{R}) \neq \{0\}$.

BEVIS: Vi måste bevisa att det finns en funktion som har kompakt stöd och är oändligt deriverbar men som inte är identiskt noll. Vi betraktar först funktionen

$$(3.1) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Påstående 1: f är oändligt deriverbar i $x = 0$ och $f^{(n)}(0) = 0$ för alla $n \geq 0$.

Vi bevisar först följande:

Påstående 2: Det finns polynom P_n , $n \geq 0$, sådana att, för varje $x > 0$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$.

Bevis av Påstående 2: Induktion på n . För $n = 0$ så tar vi $P_0(\xi) = 1$, per definition av f . Antag nu att påståendet är bevisat för n . Då är

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \stackrel{\text{induktion}}{=} \frac{d}{dx} \left[P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} \right] = \\ &\stackrel{\text{prod.} \cdot \text{kedj.}}{=} e^{-1/x} \left[\frac{1}{x^2} P_n\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) \right], \end{aligned}$$

vilket innebär att vi kan ta

$$P_{n+1}(\xi) = \xi^2 [P_n(\xi) - P_n'(\xi)].$$

Vi kan nu bevisa Påstående 1 också via induktion på n . För $n = 0$ så är $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$, enligt definitionen. Antag att $f^{(n)}(0) = 0$. Per definition av derivata så är

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x},$$

dvs vi måste bevisa att gränsvärdet existerar och är lika med noll. Per induktionshypotesen så är $f^{(n)}(0) = 0$. Dessutom vet vi att gränsvärdet då $x \rightarrow 0^-$ blir noll, ty f är den konstanta funktionen noll i den regionen. Det återstår alltså att bevisa att

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = 0.$$

Men enligt Påstående 2 så är, för $x > 0$,

$$\frac{f^{(n)}(x)}{x} = \xi P_n(\xi) e^{-\xi}, \quad \xi = 1/x,$$

vilket kommer att gå mot noll då $\xi \rightarrow +\infty$ (dvs $x \rightarrow 0$), ty den negativa exponentialen slår vilket som helst polynom.

Så vi har bevisat Påstående 1. Tag nu $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ enligt, t.ex.,

$$g(x) = f(1 - x^2).$$

Eftersom g är en sammansättning av två oändligt deriverbara funktioner ($1 - x^2$ och f) så är g också oändligt deriverbar. Och per definition av f så är $\text{supp}(g) = [-1, 1]$. ■

Anmärkning 3.5. Givet att det finns en nollskild testfunktion med stöd $[-1, 1]$ så kan vi, via translation och skalning, skapa för varje $a < b$ och $t \in \mathbb{R}$ en testfunktion $\phi = \phi_{a,b}^t$ sådan att $\text{supp}(\phi) = [a, b]$ och $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = t$. Denna observation motiverar i sin tur nästa definition:

Definition 3.6. Låt ϕ vara en testfunktion med $\text{supp}(\phi) = [-1, 1]$ och $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$. För $\delta > 0$ sätt $\phi_\delta(x) = \frac{1}{\delta} \phi(x/\delta)$. Då gäller för varje $\delta > 0$ att

- ϕ_δ är också en testfunktion,
- $\text{supp}(\phi_\delta) = [-\delta, \delta]$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\delta(x) dx = 1$.

Familjen $\{\phi_\delta : \delta > 0\}$ kallas för en *approximativ identitet*.

Notera att, om $\{\phi_\delta\}$ är en approximativ identitet och $\phi(0) = \phi_1(0) > 0$, då gäller att

$$(3.2) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \phi_\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Intuitivt så går ϕ_δ mot en "puls i origo".

Proposition 3.7. Låt $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerliga funktioner. Om

$$(3.3) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x) dx,$$

då är $f = g$, dvs $f(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

BEVIS: Antag att f och g är kontinuerliga s.a. (3.3) gäller. Det räcker att bevisa att $f(0) = g(0)$ för vi kan sedan ta hand om en annan godtycklig punkt via en translation. Låt $\{\phi_\delta\}$ vara en approximativ identitet. Då gäller för varje $\delta > 0$ att

$$(3.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_\delta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi_\delta(x) dx.$$

Eftersom $\text{supp}(\phi_\delta) = [-\delta, \delta]$ så är (3.4) ekvivalent med

$$(3.5) \quad \int_{-\delta}^{\delta} f(x)\phi_\delta(x) dx = \int_{-\delta}^{\delta} g(x)\phi_\delta(x) dx.$$

Skriv $f(x) = f(0) + [f(x) - f(0)]$, $g(x) = g(0) + [g(x) - g(0)]$ och kom ihåg att $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\delta(x) dx = \int_{-\delta}^{\delta} \phi_\delta(x) dx = 1$. På så sätt kan (3.5) skrivas om till

$$(3.6) \quad f(0) - g(0) = \int_{-\delta}^{\delta} \phi_\delta(x) [(f(x) - f(0)) + (g(x) - g(0))] dx.$$

Låt nu $\varepsilon > 0$. Eftersom f och g är kontinuerliga så finns det $\delta > 0$ sådant att

$$|x| \leq \delta \Rightarrow \max\{|f(x) - f(0)|, |g(x) - g(0)|\} < \varepsilon.$$

Med detta val av δ , insättning in i (3.6) plus triangelolikheten medför att $|f(0) - g(0)| < 2\varepsilon$. Ty $\varepsilon > 0$ var godtyckligt så måste $f(0) = g(0)$ gälla. ■

Med ord så säger Proposition 3.7 att, om två kontinuerliga funktioner f och g "klarar alla tester för likhet", så är de faktiskt lika. Propositionen kan utvidgas med viss reservation till icke-kontinuerliga funktioner:

Definition/Notation 3.8. En funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sägs vara *lokalt integrerbar* om f är Riemannintegrerbar¹ på varje ändlig intervall.

Mängden av alla lokalt integrerbara funktioner betecknas $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$.

Varje kontinuerlig funktion är lokalt integrerbar men inte tvärtom. Det enklaste motexemplet vore en funktion med en ändlig diskontinuitet i en enda punkt.

Definition 3.9. Låt $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara två funktioner. Vi säger att f och g är *lika nästan överallt*², och skriver " $f = g$ a.e.", om $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ är en nollmängd³.

Skriv $f \sim g$ om f är lika med g nästan överallt. Det är lätt att kontrollera att $\sim$ är en ekvivalensrelation på mängden av alla reellvärda funktioner. Det enda som inte är helt trivialt att verifiera är transitivitet - detta reducerar till att kontrollera att en union av två nollmängder är en nollmängd.

¹I en mer avancerad formulering av teorin för distributioner så används Lebesgue- i stället för Riemann integralen.

²Engelska: equal almost everywhere.

³I en dimension,, en nollmängd är en mängd som kan täckas av ändligt många intervaller vars sammanlagda längd är godtyckligt liten.

Beviset av följande sats utelämnas:

Sats 3.10. Låt $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Om

$$(3.7) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) : \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x) dx,$$

då är $f = g$ a.e..

Definition 3.11. Låt V vara ett vektorrum över $\mathbb{R}$. En linjär avbildning från V till $\mathbb{R}$ kallas för en *linjär funktional* på V .

Definition 3.12. En *distribution* på $\mathbb{R}$ är en linjär funktional på $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Vi skriver u för en generisk distribution. Så $u : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ är en linjär avbildning.

Till varje $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ kan vi ansluta en distribution u_f enligt

$$(3.8) \quad u_f(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x) dx.$$

Proposition 3.7 säger att, om f och g är kontinuerliga och $u_f = u_g$ så är $f = g$. Sats 3.10 säger mer allmänt att, om $u_f = u_g$ då är $f = g$ a.e. Så, åtminstone upp till a.e. likhet, en lokalt integrerbar funktion är entydigt bestämd av motsvarande distribution. Men det finns distributioner som inte kommer från lokalt integrerbara funktioner. Dirac- δ kommer att vara ett exempel. Innan vi ger dess formella definition vill vi bevisa Proposition 3.14, som starkt indikerar att begreppet "distribution" är bredare än begreppet "lokalt integrerbar funktion".

Definition 3.13. Låt u vara en distribution. Vi kan definiera en ny distribution u' enligt

$$(3.9) \quad u'(\phi) = -u(\phi') \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Notera att definitionen make:ar sense, ty

- om ϕ är oändligt deriverbar och har kompakt stöd, så också har ϕ'
- derivering av funktioner är en linjär operation, så u' kommer också att vara en linjär avbildning.

Distributionen u' kallas för *derivatan* av distributionen u . Terminologin förklaras av nästa proposition:

Proposition 3.14. Om $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en deriverbar funktion så är $(u_f)' = u_{f'}$.

BEVIS: För en godtycklig testfunktion ϕ så har vi att

$$\begin{aligned} (u_f)'(\phi) &\stackrel{(3.9)}{=} -u_f(\phi') \stackrel{(3.8)}{=} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x) dx = \\ &\stackrel{\text{part. int.}}{=} -f(x)\phi(x)|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x) dx. \end{aligned}$$

Den första termen är noll ty ϕ har kompakt stöd och den andra termen är, per (3.8), just $u_{f'}(\phi)$.

■

Detta är snyggt - lite informellt kan vi säga att begreppet "distribution" tillåter oss att "derivata icke-deriverbara funktioner", åtminstone lokalt integrerbara funktioner och därmed, i synnerhet, alla kontinuerliga funktioner.

Definition 3.15. Den endimensionella *Heaviside funktionen* $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ges av

$$(3.10) \quad H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Eftersom H har bara en ändlig diskontinuitet i $x = 0$ så är H lokalt integrerbar och kan därför betraktas som en distribution enligt (3.8). Som sådan är den "deriverbar":

Definition 3.16. Den endimensionella *Dirac-delta distributionen* δ ges av $\delta = H'$.

Låt oss se konkret vad detta blir för något. För en testfunktion ϕ har vi

$$\begin{aligned} \delta(\phi) &= H'(\phi) \stackrel{(3.9)}{=} -H(\phi') \stackrel{(3.8)}{=} - \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \phi'(x) dx = \\ &\stackrel{(3.10)}{=} - \int_0^{\infty} \phi'(x) dx = -\phi(x)|_0^{+\infty} \stackrel{\phi \in C_0}{=} \phi(0). \end{aligned}$$

Alltså har vi en väldigt konkret beskrivning av Dirac-delta: det är den linjära avbildningen från $C_0^\infty(\mathbb{R})$ till $\mathbb{R}$ som ges av

$$(3.11) \quad \delta(\phi) = \phi(0) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Jag hade kunnat skriva upp detta direkt som definitionen av Dirac-delta, men ens reaktion hade nog varit "ok, so what?". Nu har man kanske en lite mer nyanserad reaktion! Dessutom har jag motiverat nästa avsnitt ...

3.2. AON med distributioner. För en distribution u är det väldigt vanligt, särskilt i fysik böcker, att man skriver

$$(3.12) \quad u(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \phi(x) dx.$$

Som vi har sett i (3.8), så är detta formellt korrekt om $u = u_f$ för någon lokalt integrerbar funktion f . Men för övriga distributioner är (3.12) formellt meningslöst, ty distributionen u är *inte* en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$!! Men så skriver folk. Sedan fortsätter man och utför de sedvanliga variabelsubstitutionerna som om HL av (3.12) var en meningsfull integral. Vi tar upp de tre grundläggande sådana, vilka alla kan tolkas rigoröst i termer av manipulationer med distributioner.

SPEGLING:

$$(3.13) \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(-x) \phi(x) dx \stackrel{y=-x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u(y) \phi(-y) dy.$$

RIGORÖS TOLKNING: Givet en distribution u , finns det en distribution u_- som ges av

$$(3.14) \quad u_-(\phi) = u(\phi_-), \quad \text{där } \phi_-(x) = \phi(-x).$$

Notera att u_- verkligen är en distribution, ty

- om ϕ är en testfunktion så också är ϕ_- ,
- avbildningen $\phi \mapsto \phi_-$ på testfunktioner är linjär.

SKALNING: Låt $a > 0$. Man kan skriva

$$(3.15) \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(ax) \phi(x) dx \stackrel{y=ax}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u(y) \left[\frac{1}{a} \phi\left(\frac{y}{a}\right) \right] dy.$$

RIGORÖS TOLKNING: Givet en distribution u , finns det en distribution u_a som ges av

$$(3.16) \quad u_a(\phi) = u(\phi_a), \quad \text{där } \phi_a(x) = \frac{1}{a} \phi\left(\frac{x}{a}\right).$$

Notera att u_a verkligen är en distribution, enligt samma sorts resonemang som för spegling.

TRANSLATION: Låt $x_0 \in \mathbb{R}$. Man kan skriva

$$(3.17) \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(x - x_0) \phi(x) dx \stackrel{y=x-x_0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u(y) \phi(y + x_0) dy.$$

RIGORÖS TOLKNING: Givet en distribution u , finns det en distribution u^{x_0} som ges av

$$(3.18) \quad u^{x_0}(\phi) = u(\phi^{x_0}), \quad \text{där } \phi^{x_0}(x) = \phi(x + x_0).$$

Notera att u^{x_0} verkligen är en distribution, enligt samma sorts resonemang som tidigare.

Föregående diskussion innebär att vi kan make:a sense av tre identiteter för Dirac-delta som finns på s.98 i CF-kompendiet:

SPEGLING FÖR DIRAC-DELTA:

$$(3.19) \quad \delta(-x) = \delta(x).$$

RIGORÖS TOLKNING: $\delta_- = \delta$ ty för alla testfunktioner ϕ :

$$(3.20) \quad \delta_-(\phi) = \delta(\phi_-) = \phi_-(0) = \phi(-0) = \phi(0) = \delta(\phi).$$

SKALNING FÖR DIRAC-DELTA: Låt $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Då är

$$(3.21) \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

RIGORÖS TOLKNING: $\delta_a = \frac{1}{|a|} \delta$ ty vi vet redan att $\delta_- = \delta$ och, för $a > 0$ och en godtycklig testfunktion ϕ :

$$(3.22) \quad \delta_a(\phi) = \delta(\phi_a) = \phi_a(0) = \frac{1}{a} \phi\left(\frac{0}{a}\right) = \frac{1}{a} \phi(0) = \frac{1}{a} \delta(\phi).$$

TRANSLATION FÖR DIRAC-DELTA: Låt $x_0 \in \mathbb{R}$. För en godtycklig testfunktion ϕ kan man skriva

$$(3.23) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \phi(x) dx = \phi(x_0).$$

RIGORÖS TOLKNING: $\delta^{x_0}(\phi) = \phi(x_0)$ ty

$$(3.24) \quad \delta^{x_0}(\phi) = \delta(\phi^{x_0}) = \phi^{x_0}(0) = \phi(0 + x_0) = \phi(x_0).$$

Slutligen i detta avsnitt, påminner vi oss om att Dirac- δ har, enligt (3.11), en väldigt konkret beskrivning: den är en avbildning som tar som input en testfunktion ϕ och spottar ut värdet av ϕ i $x = 0$. Tydligt make:ar detta sense, inte bara för testfunktioner, men för vilken funktion som helst från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Så vi kan utvidga definitionsmängden för δ till rummet $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ av *alla* reellvärda funktioner, dvs:

$$(3.25) \quad \delta(f) = f(0) \quad \forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Som sådan är δ fortfarande en linjär avbildning. Identiteterna för spegling, skalning och translation gäller fortfarande. Man kan fortsätta med AON och skriva

$$(3.26) \quad f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx \quad \forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Notera att vi har tagit AON en nivå till här, ty f behöver inte ens vara integrerbar. I synnerhet låt $f \equiv 1$, den konstanta funktionen. f är kontinuerlig, ja, men $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ är odefinierad. Å andra sidan säger (3.26) att

$$(3.27) \quad 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx.$$

Formellt betyder detta ingenting ty δ är inte en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ - det närmaste vi skulle kunna komma till en sådan tolkning av δ är "pulsfunktionen" (3.2). Men (3.27) hintar om att det går att tolka δ som en sannolikhetsfördelning. Det tar vi upp i nästa avsnitt.

3.3. Dirac- δ som ett sannolikhetsmått. I måtteori, av vilken sannolikhetssteori är ett specialfall, så studerar man⁴ funktioner $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, där $\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$ är en familj av delmängder till $\mathbb{R}$, sådan att

1. μ är icke-negativ, dvs

$$(3.28) \quad \mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

2. μ är ändligt additiv, dvs

$$(3.29) \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i), \quad \text{då } A_1, \dots, A_n \text{ är parvis disjunkta.}$$

För att (3.29) ska make:a sense så måste familjen $\mathcal{F}$ vara sluten under ändliga disjunkta unioner. Ifall $\{\} \in \mathcal{F}$ så måste $\mu(\{\}) = 0$. Det kanoniska exemplet på det vi pratar om är följande:

Exempel 3.17. Låt $\mathcal{F}_0$ bestå av alla delmängder till $\mathbb{R}$ som kan skrivas som en ändlig union av intervaller, där med "intervall" tillåter man både öppna, slutna och halvöppna sådana samt både ändliga och oändliga intervaller. Så $\{\} \in \mathcal{F}_0$, $\mathbb{R} \in \mathcal{F}_0$ och $\mathcal{F}_0$ är sluten under ändliga unioner, ändliga snitt och komplement⁵. För $A \in \mathcal{F}_0$, tag $\mu(A) = \mu_L(A) =$ längden av A , vilket make:ar sense för en ändlig union av intervaller. Det är uppenbart att (3.28) och (3.29) är uppfyllda. Notera att $\mu_L(\mathbb{R}) = +\infty$. Här står "L" inte bara för "längd" men också för "Lebesgue" - se Anmärkning 3.22 nedan.

I sannolikhetssteori ställer man ett krav till på μ , nämligen

$$(3.30) \quad \mu(\mathbb{R}) = 1.$$

För våra ändamål så räcker det att vi arbetar hela tiden med familjen $\mathcal{F}_0$ från Exempel 3.17.

Definition 3.18. En funktion $\mu : \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller (3.28), (3.29) och (3.30) kallas för en sannolikhetsfördelning på $\mathbb{R}$. Notera att kraven medför att μ :s målmängd kan tas som $[0, 1]$.

Exempel 3.19. Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en Riemannintegrerbar funktion sådan att

- (i) $f(x) \geq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$,
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Då finns det en motsvarande sannolikhetsfördelning μ_f given av

$$(3.31) \quad \mu_f(A) = \int_A f(x) dx.$$

Man kan bevisa följande resultat på ett liknande vis som Sats 3.10 (lämnas som en övning till den nyfikna läsaren !):

Sats 3.20. Om $\mu_f = \mu_g$ då är $f = g$ a.e.

⁴Det finns även utrymme för att studera mått som tar negativa värden eller t.o.m. värden i $\mathbb{C}$, men detta intresserar oss inte här.

⁵I den "riktiga" måtteori ställer man ett hårdare krav än (3.29), nämligen *uppräknelig additivitet*, vilket innebär att motsvarigheten till (3.29) gäller för en uppräknelig union av parvis disjunkta mängder. Följdaktligen kräver man att familjen $\mathcal{F}$ är sluten under komplement och *uppräkneliga* union och snitt. En sådan familj av mängder kallas för en σ -algebra. Den minsta sådana familjen som innehåller alla intervaller kallas för *Borel σ -algebran*. Hela min presentation från denna punkt framåt är alltså en förenkling av vad man skulle se i en "riktig" kurs om måtteori eller sannolikhetssteorins grunder.

Så här ser vi första tecknet på en parallell mellan sannolikhetsfördelningar och distributioner. Frågan uppstår: finns det sannolikhetsfördelningar som inte kommer från integrerbara funktioner som uppfyller (i) och (ii) ? Vi vet att Dirac- δ är en distribution som inte kommer från en lokalt integrerbar funktion - finns det ett motsvarande fenomen för sannolikhetsfördelningar ?

Svaret på dessa frågor är ja. För att få en känsla för varför, för det första betrakta en approximativ identitet $\{\phi_\delta\}$. Eftersom $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\delta(x) dx = 1$, finns det en motsvarande familj av sannolikhetsfördelningar $\{\mu_\delta = \mu_{\phi_\delta}\}$. Dessutom, eftersom stödet av ϕ_δ blir tunnare och tunnare kring noll så är det lätt att verifiera att, för varje mängd $A \in \mathcal{F}_0$ som har en nollskild längd:

$$(3.32) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_\delta(A) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \in A, \\ 0, & \text{if } 0 \notin A. \end{cases}$$

För det andra, det är lätt att bevisa, med samma sorts resonemang som i beviset av Proposition 3.7, att om $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig och $\{\phi_\delta\}$ är en approximativ identitet så gäller:

$$(3.33) \quad f(0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_\delta(x) dx.$$

Om vi nu jämför detta med (3.26) och tittar igen på (3.32) så blir förhoppningsvis följande definition naturlig:

Definition 3.21. *Dirac- δ måttet* är den sannolikhetsfördelning $\delta : \mathcal{F}_0 \rightarrow [0, 1]$ som ges av

$$(3.34) \quad \delta(A) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \in A, \\ 0, & \text{if } 0 \notin A. \end{cases}$$

Anmärkning 3.22. Notera att (3.34) säger mer än (3.32), ty man ger mått/sannolikhet 1 till vilken som helst mängd $A \in \mathcal{F}_0$ som innehåller noll, även om A har längd noll (dvs är en nollmängd). I synnerhet gäller det även singleton-mängden $A = \{0\}$. Fördelningen (3.34) kallas därför för en *punktmassa i origo*, eller för ett *singulärt mått i origo*.

Dessutom notera att (3.34) make:ar sense för vilken som helst delmängd till $\mathbb{R}$, inte bara mängder i $\mathcal{F}_0$. I synnerhet är δ -mättet uppräkneligt additivt (se Fotnot 5) och därmed ett riktigt *mått*. Det kan därför jämföras direkt med Lebesgue måttet, vilket på $\mathcal{F}_0$ verkar på exakt samma sätt som grundexemplet 3.17, dvs

- Lebesgue måttet av en mängd $A \in \mathcal{F}_0$ är just dess längd
- varje Riemannintegrerbar funktion är Lebesgue integrerbar
- Lebesgue-integralen över en mängd $A \in \mathcal{F}_0$ av en Riemannintegrerbar funktion är samma sak som Riemannintegralen av densamma.

Detta synsätt tillåter oss att ge en rigorös tolkning av (3.26) för alla Riemannintegrerbara funktioner. Kom ihåg, för en ändlig intervall I och en Riemannintegrerbar funktion f så är, per definition,

$$(3.35) \quad \int_I f(x) dx = \sup_{\Phi \leq f} \int_I \Phi(x) dx = \inf_{\Psi \geq f} \int_I \Psi(x) dx,$$

där Φ, Ψ är trappfunktioner på I . Riemannintegralen av en trappfunktion T definieras i sin tur enligt

$$(3.36) \quad \int_I T(x) dx = \sum_{j=1}^n c_j \mu_L(I_j),$$

där $I = I_1 \cup \dots \cup I_n$ är en partition av I så att T har det konstanta värdet c_j på I_j . Det är nu naturligt att för en sådan trappfunktion T definiera

$$(3.37) \quad \int_I T(x) \delta(x) dx = \sum_{j=1}^n c_j \delta(I_j)$$

och för en godtycklig Riemannintegrerbar funktion f att definiera

$$(3.38) \quad \int_I f(x)\delta(x) dx = \sup_{\Phi \leq f} \int_I \Phi(x)\delta(x) dx = \inf_{\Psi \geq f} \int_I \Psi(x)\delta(x) dx.$$

Men från (3.34) och (3.37) är det lätt att härleda att

$$(3.39) \quad \int_I T(x)\delta(x) dx = \begin{cases} T(0), & \text{om } 0 \in I, \\ 0, & \text{om } 0 \notin I, \end{cases}$$

och följaktligen, för en godtycklig Riemannintegrerbar f , att

$$(3.40) \quad \int_I f(x)\delta(x) dx = \begin{cases} f(0), & \text{om } 0 \in I, \\ 0, & \text{om } 0 \notin I. \end{cases}$$

Här har vi betraktat endast ändliga intervaller I men det är lätt att se att (3.40) även make:ar sense för en oändligt intervall. Vi har därmed lyckats ge en rigorös tolkning av en generalisering till godtyckliga intervaller av (3.26), åtminstone om f är Riemannintegrerbar.

Anmärkning 3.23. Det finns en till fördel med att se på Dirac- δ från sannolikhetsperspektivet. För att kunna rigoröst definiera Dirac- δ som en distribution, så började vi med begreppet “(lokalt) integrerbar funktion” och utvidgade detta till det mer abstrakta begreppet “distribution”. Integrerbara funktioner ger också upphov till sannolikhetsfördelningar enligt Exempel 3.19. Men när det gäller sannolikhetsfördelningar så finns det ingenting enklare än just Dirac- δ . Den svarar mot ett experiment där det finns ett enda utfall som har en positiv sannolikhet.

I verkligheten har man alltid ändligt mycket data och därmed a priori ändligt många möjliga utfall av ett experiment. Den s.k. *slumpvariabel* som betecknar utfallet kan därför alltid a priori skrivas som en s.k. *konvexkombination* av translationer av Dirac- δ . Vi illustrerar med ett exempel:

EXEMPEL: Säg att du kastar ett mynt tre gånger. Låt slumpvariabeln X beteckna antalet kronor. Då kan man skriva

$$(3.41) \quad X = \frac{1}{8}\delta^0 + \frac{3}{8}\delta^1 + \frac{3}{8}\delta^2 + \frac{1}{8}\delta^3, \quad \text{där } \forall t \in \mathbb{R} : \delta^t(A) = \begin{cases} 1, & \text{om } t \in A, \\ 0, & \text{om } t \notin A. \end{cases}$$

Dvs, (3.41) ska tolkas enligt:

$$(3.42) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{8}\delta^0(A) + \frac{3}{8}\delta^1(A) + \frac{3}{8}\delta^2(A) + \frac{1}{8}\delta^3(A).$$

Ordet “konvexkombination” syftar på att koefficienterna är positiva och summerar till 1.

Så från sannolikhetsperspektivet uppstår kontinuerliga funktioner (som uppfyller (i) och (ii) i Exempel 3.19) när man har mer och mer data och vill därmed gå i gräns med längre och längre konvexkombinationer av delta-mått. Medan att analysperspektivet är i någon mening det omvända: Dirac- δ uppstår som en distribution när man går i gräns med en approximativ identitet, dvs med en mer och mer koncentrerad serie av testfunktioner som uppfyller (i) och (ii).