Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Kompletterande övningar, i numerisk analys, för Z2

En del av övningarna är lite pratiga. Det beror på att boken inte innehåller någon numerisk analys och på att jag inte vet hur mycket numerisk analys som presenterats i tidigare kurser. Se också de sidor från föreläsningsanteckningarna som handlar om numerisk analys. De övningar som kräver programmering har inte fullständiga lösningar. Övriga problem har dock lösningar. Förkortningen DE betyder differentialekvation(en).

1 Övningar på system av ickelinjära ekvationer

1. Formulera Newtons metod för följande två problem.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2^3 - 9 = 0 \\ 3x_1^2 x_2 - x_2^3 - 4 = 0 \end{cases}$$

2. Vi vill använda Newtons metod för att hitta en **symmetrisk** 2×2-matris sådan att summan av kvadraterna på matrisens alla element är 118. Matrisen determinant skall var -41. Slutligen är produkten av matrisens alla element 392. Sätt upp Newtons metod för problemet.

3. Försök att hitta så många rötter som möjligt till systemet:

$$\begin{cases} \sin x + y^2 + \log z = 3 \\ 3x + 2^y - z^3 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^3 = 6 \end{cases}$$

4. Hur ser Newtons metod ut för det linjära ekvationssystemet $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$? $\tilde{A}$ är en kvadratisk och ickesingulär matris.

2 Övningar på optimering

1. Vi använder steepest descent utan linjesökning för att minimera $f(x, y) = [x^2 + \sigma y^2]/2$ med $\sigma > 0$. För vilka positiva σ konvergerar metoden, för godtycklig startpunkt, mot minimum?

2. Svårare: Formulera linjesökningsproblemet för funktionen i föregående uppgift när negativa gradientriktningen används som sökriktning. Bestäm också den optimala steglängden. Antag att vi står i punkten $[x, y]^T$ (för att slippa alla index) och tar ett steg, med linjesökning, och då hamnar i punkten $[x', y']^T$. Med lite råräkning kan man visa att:

$$\frac{f(x', y')}{f(x, y)} = \frac{\sigma(\sigma - 1)^2 x^2 y^2}{(x^2 + \sigma y^2)(x^2 + \sigma^3 y^2)}$$

   Använd detta resultat för att visa att metoden konvergerar mot minimum för varje $\sigma > 0$ och för varje startpunkt. Vad säger σ om konvergenshastigheten?

3. Hur fungerar Newtons metod för problemet i föregående uppgift?

4. Låt $\tilde{B}$ vara en kvadratisk och symmetrisk 2×2-matris. Beräkna gradienten och Hessianen av $\tilde{x}^T \tilde{B} \tilde{x}$. Beräkna gradienterna av $\tilde{c}^T \tilde{x}$ respektive $\tilde{x}^T \tilde{c}$, då $\tilde{c}$ är en konstant kolonnvektor med två element.

5. Beräkna minimum till minstakvadratproblemet

$$\min_{\tilde{x}} |\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{b}|$$

   genom att beräkna gradienten av normen i kvadrat (varför kan man lika gärna se på kvadraten?). Vad är Hessianen av $|\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{b}|^2$?

3 Övningar på system av ODE

1. Skriv om följande ekvationer som första ordningens system: a) $y'' = t + y + y'$, b) $y''' = y'' + ty$, c) $y''' = y'' - 2y' + y - t + 1$. Begynnelsevillkor i a) $y(0) = 1, y'(0) = -1$, i b) $y(1) = 1, y'(1) = -1, y''(1) = 2$ och i c) $y(-1) = 1, y'(-1) = -1, y''(-1) = 2$.

2. Skriv om följande system ekvationer (rörelse-ekvationer för ett tvåkropparsproblem) som ett första ordningens system:
$$\begin{cases} y_1'' = -GMy_1/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2} \\ y_2'' = -GMy_2/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2} \end{cases}$$
$y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = -1, y_1'(0) = 2$. G och M är kända konstanter.

3. Formulera Eulers metod för problemet nedan och tag ett Euler-steg med steglängden $h = 0.1$. (u och v är skalära funktioner av tiden t.)
$$\begin{cases} v' = tvu'' + u' \\ u''' = u - u' + v^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} v(t_0) = 3 \\ u(t_0) = 1, u'(t_0) = 2, u''(t_0) = 4 \end{cases} \quad t_0 = -2$$

4 Övningar på PDE

1. I enkla fall kan man lösa värmeledningsekvationen analytiskt. Hitta en lösning på formen $u(x,t) = q(x)r(t)$ (separation av variabler) som satisfierar:
$$u_t'(x,t) = c\ u_{xx}''(x,t),\ 0 < x < 1,\ t > 0,\ c > 0$$
$$u(0,t) = 0,\quad u(1,t) = 0,\quad t \geq 0,\quad u(x,0) = \sin(\pi x),\ 0 < x < 1$$

2. Byt randvillkor till Neumannvillkor i ovanstående övning
$$u_x'(0,t) = 0,\quad u_x'(1,t) = 0,\quad t \geq 0,$$
och tag begynnelsevillkoret
$$u(x,0) = 3 + \cos(\pi x),\ 0 < x < 1$$
Du kan även ta $c = 1$ i DE. a) Hitta en lösning på formen $u(x,t) = \text{konstant} + q(x)r(t)$. I föregående övning gäller att $u(x,t) \to 0$ när $t \to \infty$. Detta är dock inte fallet i denna övning eftersom randvillkoren ser till att inget "läcker ut" vid ändarna.
b) Visa, mer allmänt, att initialmängden inte ändras, dvs. att
$$\int_0^1 u(x,t)\ dx = \int_0^1 f(x)\ dx$$
givet att $u(x,0) = f(x)$. Ledning: integrera DE med avseende på x och t och utnyttja randvillkoren.

c) Man kan använda detta resonemang för att förstå vad randvillkoren $u_x(0,t) = \alpha$ samt $u_x(1,t) = \beta$ betyder. Man får vara lite försiktig vid tolkningen eftersom dessa typer av Neumannvillkor normalt formuleras i termer av normalderivatan, $\partial u/\partial n$, där n är det **utåtriktade** normalen.

d) Hitta en lösning på formen $p(t) + q(x)$, där p och q är polynom, och där vi har följande randvillkor
$$u_x'(0,t) = \alpha,\quad u_x'(1,t) = \beta,\quad t \geq 0,$$
och begynnelsevillkoret
$$u(x,0) = \alpha x + \frac{\beta - \alpha}{2} x^2,\ 0 < x < 1$$

3. Bilden av bokstaven Z på hemsidan visar en diskretisering (trianglar) av ett beräkningsområde som har både en inre (randen på Z:t) och en yttre rand (rektangeln). Ekvationen är Laplace ekvation och den inre randen har den elektriska potential 1V och den yttre randen har potentialen 0V. Lösningen till ekvationen, $u(x, y)$, är potentialen i det inre av området. Om man zoomar i lösningen ser man att u varierar snabbt där Z har yttre hörn. Snabb variation innebär att längden av gradienten av u är stor. Denna gradient är den elektriska fältstyrkan och det är välkänt att den är stor vid spetsiga föremål (spetsverkan).

   Den numeriska metod som använts för att lösa problemet är adaptiv och förfinar nätet (mindre trianglar) där u varierar snabbt (där $|\text{grad } u|$ är stor). Man kan se att nätet är fint i vissa hörn, men inte i alla.

   Ett sätt att förstå varför, är att studera ett modellproblem. Vi löser Laplace ekvation på en cirkelsektor, där öppningsvinkeln, α, i skivan varieras. Det är lämpligt att först skriva om ekvationen, $u_{xx} + u_{yy} = 0$, genom att använda polära koordinater, $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$. Ekvationen kan då skrivas

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\psi\psi} = 0$$

   Att visa detta är en lite småjobbig övning. Testa om Du vill. Låt området, D, ges av $0 < r < 1$, $0 < \psi < \alpha$. Visa att en lösning till DE, i D, är:

$$u(r, \psi) = r^\alpha \cos(\alpha\psi)$$

   Randvillkoren får svara mot denna lösning, dvs. $u(r, 0) = r^\alpha$, $u(r, \alpha) = r^\alpha \cos(\alpha^2)$, $u(1, \psi) = \cos(\alpha\psi)$. Studera hur $u_r(r, \psi)$ uppför sig för små $r > 0$ när α varierar.

5 Lösningar till system av ickelinjära ekvationer

1: Den generella formeln är $\tilde{x}^{(k+1)} = \tilde{x}^{(k)} - (\tilde{J}(\tilde{x}^{(k)}))^{-1}\tilde{f}(\tilde{x}^{(k)})$.

$$a)\quad \tilde{x}^{(k+1)} = \tilde{x}^{(k)} - \begin{bmatrix} 2x_1^{(k)} & 2x_2^{(k)} \\ 2x_1^{(k)} & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (x_1^{(k)})^2 + (x_2^{(k)})^2 - 1 \\ (x_1^{(k)})^2 - x_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$b)\quad \tilde{x}^{(k+1)} = \tilde{x}^{(k)} - \begin{bmatrix} 2x_1^{(k)} + (x_2^{(k)})^3 & 3x_1^{(k)}(x_2^{(k)})^2 \\ 6x_1^{(k)}x_2^{(k)} & 3(x_1^{(k)})^2 - 3(x_2^{(k)})^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (x_1^{(k)})^2 + x_1^{(k)}(x_2^{(k)})^3 - 9 \\ 3(x_1^{(k)})^2 x_2^{(k)} - (x_2^{(k)})^3 - 4 \end{bmatrix}$$

2: Låt matrisen ha elementen $a = a_{1,1}$, $b = a_{1,2} = a_{2,1}$ samt $c = a_{2,2}$. Ekvationerna blir: $a^2 + 2b^2 + c^2 - 118 = 0$, $ac - b^2 + 41 = 0$ och $ab^2c - 392 = 0$ och Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} a_{j+1} \\ b_{j+1} \\ c_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a_j & 4b_j & 2c_j \\ c_j & -2b_j & a_j \\ b_j^2 c_j & 2a_j b_j c_j & a_j b_j^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_j^2 + 2b_j^2 + c_j^2 - 118 \\ a_j c_j - b_j^2 + 41 \\ a_j b_j^2 c_j - 392 \end{bmatrix}$$

3: Newtons metod blir:

$$\begin{bmatrix} x^{(j+1)} \\ y^{(j+1)} \\ z^{(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(j)} \\ y^{(j)} \\ z^{(j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos x^{(j)} & 2y^{(j)} & 1/z^{(j)} \\ 3 & 2^{y^{(j)}}\log 2 & -3(z^{(j)})^2 \\ 2x^{(j)} & 2y^{(j)} & 3(z^{(j)})^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sin x^{(j)} + (y^{(j)})^2 + \log z^{(j)} - 3 \\ 3x^{(j)} + 2^{y^{(j)}} - (z^{(j)})^3 \\ (x^{(j)})^2 + (y^{(j)})^2 + (z^{(j)})^3 - 6 \end{bmatrix}$$

Man kan givetvsi skriva x_j etc. i stället. Om man väljer några olika startpunkter kan man få flera rötter. Jag hittade följande fyra: $[-1.1456, 2.0183, 0.8500]^T$, $[0.9641, -1.3348, 1.4871]^T$, $[0.2423, 1.5272, 1.5339]^T$ och $[-0.0610, -2.4487, 0.0531]^T$.

4: Låt oss se på 2×2-fallet. Vi har ekvationerna: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ och $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ så att Newtons metod blir:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(j+1)} \\ x_2^{(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} - b_1 \\ a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} - b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \end{bmatrix} - \tilde{A}^{-1}\left[\tilde{A}\begin{bmatrix} x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right]$$

Vilket blir $\tilde{A}^{-1}\tilde{b}$. Så Newtons problem på ett linjärt problem löser problemet i ett steg. Föga förvånande eftersom vi härleder Newtons metod genom att approximera problemet med ett linjärt problem. Är problemet linjärt från början så är ju approximationen exakt.

---

6 Lösningar till optimering

1: Minimum ges av $x = y = 0$ eftersom funktionen är en kvadratsumma. $\nabla f(x,y) = [x, \sigma y]^T$. Om vi startar i $[x_0, y_0]^T$ så blir $[x_1, y_1]^T = [x_0, y_0]^T - [x_0, \sigma y_0]^T = [0, (1-\sigma)y_0]^T$, Allmänt gäller att $[x_k, y_k]^T = [0, (1-\sigma)^k y_0]^T$ och vi får konvergens när $|1-\sigma| < 1$, dvs. då $0 < \sigma < 2$.

2: Gradienten blir $\nabla f(x,y) = [x, \sigma y]^T$. Linjesökningsproblemet blir då:

$$\min_{\alpha>0} \frac{1}{2}\left[(x - \alpha x)^2 + \sigma(y - \alpha\sigma y)^2\right] = \min_{\alpha>0} \frac{1}{2}\left[(\alpha - 1)^2 x^2 + \sigma(\alpha\sigma - 1)^2 y^2\right]$$

Om vi finner minimum på vanligt sätt blir

$$\alpha = \frac{x^2 + \sigma^2 y^2}{x^2 + \sigma^3 y^2}$$

När det gäller konvergensen får vi se på tre fall. Om $\sigma = 1$ eller om $x = 0$ eller $y = 0$ så får vi konvergens i ett steg eftersom gradienten då är riktad mot minimum. Låt oss anta att $\sigma \neq 1$ och att $xy \neq 0$. Om $0 < \sigma < 1$ så gäller att:

$$\frac{f(x', y')}{f(x,y)} = \frac{\sigma(\sigma-1)^2 x^2 y^2}{(x^2 + \sigma y^2)(x^2 + \sigma^3 y^2)} = \frac{\sigma(\sigma-1)^2}{((x/y)^2 + \sigma)(1 + \sigma^3 (y/x)^2)} \leq \frac{\sigma(\sigma-1)^2}{\sigma} = (1-\sigma)^2 < 1$$

Om $1 < \sigma$ så gäller att:

$$\frac{f(x', y')}{f(x,y)} = \frac{\sigma(\sigma-1)^2 x^2 y^2}{(x^2 + \sigma y^2)(x^2 + \sigma^3 y^2)} = \frac{\sigma(\sigma-1)^2}{(1 + \sigma(y/x)^2)((x/y)^2 + \sigma^3)} \leq \frac{\sigma(\sigma-1)^2}{\sigma^3} = (1 - 1/\sigma)^2 < 1$$

I båda fallen gäller alltså (för olika τ):

$$0 \leq \frac{f(x', y')}{f(x,y)} \leq \tau < 1$$

Så om $\tilde{x}^{(k)}, k = 0, 1, 2, \ldots$ betecknar iteranderna gäller tydligen $f(x^{(1)}) \leq \tau f(x^{(0)})$, $f(x^{(2)}) \leq \tau f(x^{(1)})$ eller allmänt $f(x^{(k)}) \leq \tau^k f(x^{(0)})$. Eftersom funktionen är ickenegativ och har entydigt minimum så måste då gälla att $f(x^{(k)}) \to 0$ dvs. att $x^{(k)} \to \tilde{0}$.

Vi ser att konvergensen blir snabb om $\sigma \approx 1$. Vi kan få långsam konvergens om σ avviker mycket från ett. Detta svarar geometriskt mot att funktionens nivåkurvor är utdragna ellipser. Gradienten är ortogonal mot nivåkurvan som går genom den aktuella punkten vi befinner oss i. Detta gör att negativa gradienten kan bli nästan ortogonal mot riktningen som vi borde gå i (riktningen mot minimum).

3: Newtons metod konvergerar i ett steg oberoende av vilken startpunkt vi har. $\nabla f(x,y) = [x, \sigma y]^T$ och Hessianen blir diagonalmatrisen $\tilde{H} = \text{diag}(1, \sigma)$. Detta medför att Newtonsökriktningen blir $-\tilde{H}^{-1}\nabla f(x,y) = -[x,y]^T$

---

så att $[x, y]^T - \tilde{H}^{-1}\nabla f(x, y) = [0, 0]^T$.

4: Om vi arbetar med 2×2-matriser får vi

$$\tilde{x}^T\tilde{B}\tilde{x} = \left[\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] = b_{1,1}x_1^2 + b_{1,2}x_1x_2 + b_{2,1}x_1x_2 + b_{2,2}x_2^2$$

Gradienten blir således:

$$\nabla\tilde{x}^T\tilde{B}\tilde{x} = \left[\begin{array}{c} 2x_1b_{1,1} + (b_{1,2} + b_{2,1})x_2 \\ (b_{1,2} + b_{2,1})x_1 + 2b_{2,2}x_2 \end{array}\right] = 2\tilde{B}\tilde{x}$$

då $\tilde{B}$ är symmetrisk (om detta inte är fallet så blir gradienten $(\tilde{B} + \tilde{B}^T)\tilde{x}$). Hessianen utgörs av andraderivatorna och blir tydligen:

$$\tilde{H} = \left[\begin{array}{cc} 2b_{1,1} & b_{1,2} + b_{2,1} \\ b_{1,2} + b_{2,1} & 2b_{2,2} \end{array}\right] = 2\tilde{B}$$

Jämför det skalära fallet, där derivatan av βx^2 är $2\beta x$ och andraderivatan blir 2β.
Gradienterna av $\tilde{c}^T\tilde{x}$ och $\tilde{x}^T\tilde{c}$ blir $\tilde{c}$ i båda fallen.

5: Istället för att minimera $|\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{b}|_2$ kan vi minimera $|\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{b}|_2^2$. Anledningen till att detta fungerar är att funktionen (normen) är ickenegativ. Antag allmänt att vi vill minimera $f(\tilde{x})$ där vi vet att $f(\tilde{x}) \geq 0$ för alla $\tilde{x}$. Om $\tilde{x}^*$ är ett minimum (för f) kommer det även att var ett minimum för funktionen $f^2(\tilde{x})$ ty om $f(\tilde{x}) \leq f(\tilde{y})$ så gäller $f^2(\tilde{x}) \leq f^2(\tilde{y})$. Ovanstående är **inte** sant om vi tillåter f att vara negativ. Tag t.ex. $f(x) = x$ som saknar minimum, $f^2(x) = x^2$ har ju däremot ett globalt minimum. Det räcker inte heller att f har ett globalt minimum. Tag t.ex. $f(x) = x^2 - 1$ som har ett globalt minimum $(x^* = 0)$, men som inte är ickenegativ. $f^2(x)$ har nu $x^* = 0$ som lokalt **maximum** och $x = \pm 1$ är lokala minima till f^2 (men de är ju inte minima till f).

$$|\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{b}|_2^2 = (\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{b})^T(\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{b}) = \tilde{x}^T\tilde{A}^T\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{x}^T\tilde{A}^T\tilde{b} - \tilde{b}^T\tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}^T\tilde{b} =$$

$$\tilde{x}^T\tilde{A}^T\tilde{A}\tilde{x} - 2\tilde{x}^T\tilde{A}^T\tilde{b} + \tilde{b}^T\tilde{b}$$

$$\nabla|\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{b}|_2^2 = 2\tilde{A}^T\tilde{A}\tilde{x} - 2\tilde{A}^T\tilde{b} = 2(\tilde{A}^T\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{A}^T\tilde{b})$$

vilket vi känner igen som normalekvationerna. Hessianen blir $2\tilde{A}^T\tilde{A}$ som är positivt semidefinit.

---

7 Lösningar till ODE

1: Allmänt gäller att en ekvation av n-te ordningen ger upphov till ett system av n första ordningens ekvationer.
a) Sätt $u_1 = y$ och $u_2 = u_1' = y'$. Vi får systemet:

$$\left\{\begin{array}{l} u_1' = u_2 \\ u_2' = t + u_1 + u_2 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} u_1^{(0)} = 1 \\ u_2^{(0)} = -1 \end{array}\right.$$

b, c) Sätt $u_1 = y$, $u_2 = u_1' = y'$ och $u_3 = u_2' = y''$. Vi får systemen:

$$\left\{\begin{array}{l} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = u_3 + tu_1 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} u_1^{(0)} = 1 \\ u_2^{(0)} = -1 \\ u_3^{(0)} = 2 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = u_3 - 2u_2 + u_1 - t + 1 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} u_1^{(0)} = 1 \\ u_2^{(0)} = -1 \\ u_3^{(0)} = 2 \end{array}\right. ,$$

Notera att dessa system börjar på samma sätt. Det är den sista differentialekvationen i systemet som innehåller den ursprungliga ekvationen av högre ordning.

2: Den allmänna regeln är följande. Om vi har s stycken system med ordningarna $n_1, n_2, \ldots, n_s$ så ger det upphov till ett system, av första ordningens ekvationer, av ordning $n_1 + n_2 + \cdots + n_s$. Så i detta fall skall vi få $2 + 2 = 4$ ekvationer. Vi inför funktionerna $u_1 = y_1$, $u_2 = u_1' = y_1'$, $u_3 = y_2$ och $u_4 = u_3' = y_2'$. Vi får systemet:

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -GMu_1/(u_1^2 + u_3^2)^{3/2} \\ u_3' = u_4 \\ u_4' = -GMu_3/(u_1^2 + u_3^2)^{3/2} \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1^{(0)} = 1 \\ u_2^{(0)} = 0 \\ u_3^{(0)} = -1 \\ u_4^{(0)} = 2 \end{cases}$$

3: Inför $y_1 = v$, $y_2 = u$, $y_3 = y_2' = u'$ samt $y_4 = y_3' = u''$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = ty_1y_4 + y_3 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_2 - y_3 + y_1^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(-2) = 3 \\ y_2(-2) = 1 \\ y_3(-2) = 2 \\ y_4(-2) = 4 \end{cases}$$

Så

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \\ y_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_4^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} t_0y_1^{(0)}y_4^{(0)} + y_3^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_4^{(0)} \\ y_2^{(0)} - y_3^{(0)} + (y_1^{(0)})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 - 2 + 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.2 \\ 2.4 \\ 4.8 \end{bmatrix}$$

---

8 Lösningar till PDE

1: Vi deriverar och får

$$qr' = c\, q''r \Rightarrow r'/r = c\, q''/q, \quad (r(t), q(x) \neq 0)$$

Eftersom r beror av t och q av x så måste $r'/r = -c_1 = c\, q''/q$, där c_1 är en konstant (minustecknet kommer sig av att vi tror att $r'(t) < 0$ och vi vill ha $c_1 > 0$). Vänsterledet beror ju av t och högerledet av x och det gäller för alla t, x $(r(t), q(x) \neq 0)$ Vi löser nu dessa ordinära DE och får:

$$r(t) = c_2e^{-c_1t}, \quad q(x) = c_3\sin(\sqrt{c_1/c}\; x) + c_4\cos(\sqrt{c_1/c}\; x)$$

c_2, c_3, c_4 är konstanter. Så en lösning är

$$u(x,t) = c_2e^{-c_1t}\; \left[c_3\sin(\sqrt{c_1/c}\; x) + c_4\cos(\sqrt{c_1/c}\; x)\right]$$

Vi bestämmer nu konstanterna med hjälp av rand- och begynnelsevillkor. $u(0,t) = 0$ ger:

$$0 = c_2e^{-c_1t}c_4 \Rightarrow c_4 = 0$$

$u(1,t) = 0$ ger:

$$0 = c_2e^{-c_1t}c_3\sin(\sqrt{c_1/c}\; 1) \Rightarrow \sqrt{c_1/c} = k\,\pi$$

$u(x,0) = \sin(\pi x)$ så det ger

$$\sin(\pi x) = c_2c_3\sin(k\pi\; x) \Rightarrow c_2c_3 = 1,\; k = 1$$

Så, $c_1 = \pi^2 c$ och

$$u(x,0) = e^{-c\pi^2 t}\sin(\pi x)$$

2: Vi testar med $u(x,t) = \text{konstant} + q(x)r(t)$ och får, med samma teknik som ovan:

$$u(x,t) = 3 + e^{-c\pi^2 t}\cos(\pi x)$$

b) Integrera $u'_t = u''_{xx}$. $T > 0$ är en godtycklig tid. Först dubbelintegralen av u'_t:

$$\int_0^1 \int_0^T u'_t(x,t)\ dtdx = \int_0^1 [u(x,t)]_{t=0}^{t=T}\ dx = \int_0^1 u(x,T) - u(x,0)\ dx = \int_0^1 u(x,T) - f(x)\ dx$$

Men det gäller även:

$$\int_0^1 \int_0^T u''_{xx}(x,t)\ dtdx = \int_0^T \int_0^1 u''_{xx}(x,t)\ dxdt = \int_0^T \int_0^1 [u'_x(x,t)]_{x=0}^{x=1}\ dxdt = \int_0^T u'_x(1,t) - u'_x(0,t)\ dt = 0$$

Alltså gäller att

$$\int_0^1 u(x,T) - f(x)\ dx = 0 \quad \text{eller} \quad \int_0^1 u(x,T)\ dx = \int_0^1 f(x)\ dx = \ \text{konstant}$$

och T är ju godtycklig.
c) Vi använder härledningen ovan och får:

$$\int_0^T u'_x(1,t) - u'_x(0,t)\ dt = \int_0^T \beta - \alpha\ dt = (\beta - \alpha)T$$

så

$$\int_0^1 u(x,T) - f(x)\ dx = (\beta-\alpha)T \Rightarrow \int_0^1 u(x,T)\ dx = \int_0^1 f(x)\ dx + (\beta-\alpha)T = \text{konstant} + (\beta-\alpha)T$$

Så om $\beta < \alpha$ så avtar $\int_0^1 u(x,t)dx$ med tiden, om $\beta = \alpha$ är den konstant och om $\beta > \alpha$ så ökar den. $\alpha < 0$ betyder att det tillförs värme från vänster, $\beta > 0$ betyder att det tillförs värme från höger.

d) Vi börjar med begynnelsevillkoret:

$$u(x,0) = p(0) + q(x) = \alpha x + \frac{\beta-\alpha}{2}x^2$$

så att $q(x) = \alpha x + \frac{\beta-\alpha}{2}x^2 - c$ där $c = p(0)$ är en konstant. DE ger

$$u''_{xx} = q''(x) = \beta - \alpha \Rightarrow p(t) = (\beta-\alpha)t + c, \quad \text{ty} \quad u''_{xx} = u'_t = p'(t)$$

Lösningen har därför utseendet:

$$p(t) + q(x) = (\beta-\alpha)t + c + \alpha x + \frac{\beta-\alpha}{2}x^2 - c = (\beta-\alpha)t + \alpha x + \frac{\beta-\alpha}{2}x^2$$

Vi ser slutligen att randvillkoren är satisfierade.

3: Härledning av DE kommer sist. Vi testar med $u(r,\psi) = r^\alpha\cos(\alpha\psi)$:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\psi\psi} = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}\cos(\alpha\psi) + \frac{1}{r}\alpha r^{\alpha-1}\cos(\alpha\psi) + \frac{1}{r^2}r^\alpha(-\alpha^2)\cos(\alpha\psi) =$$

$$r^{\alpha-2}\cos(\alpha\psi)\left[\alpha(\alpha-1) + \alpha - \alpha^2\right] = 0$$

Så u satisfierar DE. Nu till r-derivatan av lösningen:

$$u_r'(r,\psi) = \alpha r^{\alpha-1}\cos(\alpha\psi)$$

Så om $\alpha < 1 \approx 57.3°$ så har derivatan, u_r' en singularitet för $r = 0$ (dvs. $u_r'(r,\psi) \to \infty$ när $r \to 0$). Fältstyrkan är stor i detta fall. Ju spetsigare vinkel desto snabbare varierar u_r'. Om $\alpha \geq 1$ så är u_r' begränsad för $0 \leq r \leq 1$:

$$|u_r'(r,\psi)| = \left|\alpha r^{\alpha-1}\cos(\alpha\psi)\right| \leq \alpha$$

Så spetsiga vinklar ger problem, men trubbiga vinklar är ofarliga.
Nu till härledningen av DE i polära koordinater, jag struntar i prim och låter $c = \cos\psi$, $s = \sin\psi$. Notera att med dessa beteckningar är $x_r = c, y_r = s$ samt $x_\psi = -rs, y_\psi = rc$. Vi får:

$$u_r = u_x x_r + u_y y_r = c u_x + s u_y$$

$$u_{rr} = c(u_{xx}x_r + u_{xy}y_r) + s(u_{yx}x_r + u_{yy}y_r) = c^2u_{xx} + csu_{xy} + csu_{yx} + s^2u_{yy} = c^2u_{xx} + 2csu_{xy} + s^2u_{yy}$$

$$u_\psi = u_x x_\psi + u_y y_\psi = -rsu_x + rcu_y$$

Nu lite kortare (utan alla mellanled):

$$u_{\psi\psi} = -r[cu_x + s[u_{xx}(-rs) + u_{xy}rc]] + r[-su_y + c[u_{yx}(-rs) + u_{yy}rc]] = -r[cu_x + su_y] + r^2[s^2u_{xx} - 2scu_{xy} + c^2u_{yy}]$$

Så

$$\frac{1}{r^2}[u_{\psi\psi} + ru_r] = s^2u_{xx} - 2scu_{xy} + c^2u_{yy}$$

Slutligen

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2}[u_{\psi\psi} + ru_r] = c^2u_{xx} + 2csu_{xy} + s^2u_{yy} + s^2u_{xx} - 2scu_{xy} + c^2u_{yy} = u_{xx} + u_{yy}$$