Tentamen i MVE041 och MMGL32 Flervariabelmatematik

Den 30 May 2015, kl. 830-1230

Hjälpmedel: Formelblad (bifogat), inga räknare.

Telefon: Gustav Kettil, 0703-088304

Totalpoäng 50. För godkänt påtentan krävs antingen 25 utav 32 poäng pågodkäntdelen, inklusive eventuella bonuspoäng. För godkänt påkursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt påtentamens alla delar.

Lösningar läggs ut påkursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas påkurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdel

1. Betrakta funktionen $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2/9 + y^2}$.
   (a) (1 pt) Skissera grafen till denna funktion.
   (b) (2 pts) Skriv ner en ekvation som beskriver familjen av nivåkurvor parametriserade utav C. Rita nivåkurvan för $C = \sqrt{2}$ och markera där denna skär axlarna. Skissa andra representativa nivåkurvor, men räkna inte ut skärningspunkter för andra värden på C.
   (c) (3 pts) Vad är gradienten till $f(x, y)$? Vad är relationen mellan gradienten och nivåkurvor? Inkludera några representativa gradientvektorer i passande skiss ovan.
   (d) (1 pt) Vad är ekvationen till tangentplanet i punkten $P = (3, 2)$?

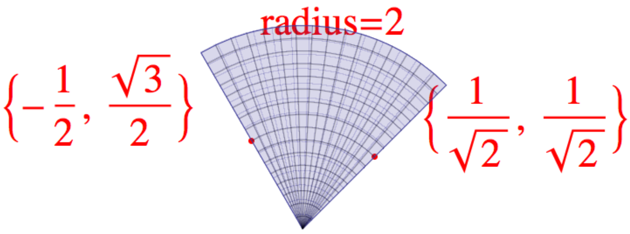
2. (4 pts) Parametrizera kurvan $\bar{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$ som bestäms skärningen mellan ytan $z = \cos^2(x)$ och planet $x + y + z = 1$, med hjälp av parametern $t = x$. Beräkna $d\bar{r}(t)/dt$.

3. (4 pts) Använd Lagrange metod för att hitta minsta avståndet från origo till kurvan $x^2y = 16$ i den första kvadranten.

4. (4 pts) Beräkna Jacobideterminanten för koordinat bytet för polära koordinater $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Beräkna

$$\iint_R 3\frac{\exp(\sqrt{x^2+y^2}/2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dA$$

där R ges av området i figuren:



5. (3 pts) Skriv om följande andra ordningens ODE $\frac{d^2f}{dt^2} = -1$ till ett system av första ordningens ODE för variablerna. Gör en representativ skiss av tillhörande fasdiagram och lösningskurvor.

   OBS! Notera att du inte är ombedd att hitta explicita ekvationer för lösningskurvorna, utan endast skissa dessa baserat på vektorfältet.

6. (4 pts) Betrakta följande tre vektorfält i $\mathbb{R}^3$

$$\bar{F}(x, y, z) = -y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}, \quad \bar{G}(x, y, z) = -y\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}, \quad \bar{H}(x, y, z) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + 2z\hat{\mathbf{k}}.$$

Vad är divergensen och rotationen för dessa vektorfält? Är något utav fälten $\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}$ källfritt, virvelfritt eller konservativt? Specifiera vilka vektorfält som har dessa egenskaper.

7. Greens sats:

   (a) (1 pt) Redovise identitet av Green's sats.

   (b) (5 pts) Den parametriserade kurvan $\bar{r}(t) = \sin(t)\hat{\mathbf{\imath}} + \sin(2t)\hat{\mathbf{\jmath}}$ följer en sluten bana medurs då t går från 0 till π. Använd vektorfältet $\bar{F} = -y\hat{\mathbf{\imath}}$ och Greens sats för att hitta arean av ytan innesluten av denna kurva.

Överbetygsdel

1. (2 pts) Beräkna $\iint_W z dS$, där W är ytan av sfären med radie a som ligger nedanför skärningen av sfären med konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och ovanför xy-planet.

2. (5 pts) Hur stor är volymen av området som är begränsat av ellipsoiden $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ och konen $z^2 = \frac{c^2}{3a^2b^2}(b^2x^2 + a^2y^2)$, och som ligger inuti konen.

3. Konservativa vektorfält.

   (a) (3 pts) Visa att då $\bar{F}$ är ett konservativt glatt vektorfält och $\mathcal{C}$ är en styckvis glatt och sluten kurva gäller det att $\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$. Visa också att då $\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$ runt en godtycklig sluten kurva $\mathcal{C}$, så beror $\int_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ för en kurva $\mathcal{C}$ från punkten P till punkten Q endast på dess ändpunkter P, Q.

   (b) (3 pts) Beräkna linjeintegralen $\int_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ för någon kurva från punkten $P = (0, 1, 3)$ till $Q = (\pi/2, 2, 1)$, för $\bar{F} = (-\sin(x)e^y + yz)\hat{\mathbf{\imath}} + (\cos(x)e^y + xz)\hat{\mathbf{\jmath}} + (z^2 + xy)\hat{\mathbf{k}}$.

4. Divergenssatsen och elektriska fält med symmetri.

   (a) (2 pts) Formulera divergenssatsen.

   (b) (3 pts) Betrakta en sfär med uniform laddningsfördelning λ och radie R. Maxwells tidsoberoende ekvation säger att $\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \kappa\lambda$, där κ är en enhetsberoende konstant och $\bar{E}$ är det elektriska fältet. Använd symmetri och divergenssatsen för att hitta storleken på det elektriska fältet både innanför och utanför den laddade sfären. Gör en skiss av ditt resultat.

Exam for MVE041 och MMGL32 Flervariabelmatematik

The 30 May 2015, kl. 830-1230

Help materials: Attached formula sheet. No calculators.

Telephone: Gustav Kettil, 0703-088304

Total points are 50. Passing this course requires a) 25 points of 32 points on the *Passing Part*, and b) a pass on all six Matlab labs. Your bonus points from this course apply to the passing part of the exam. The maximum score on the passing part is 32. A grade of 4 or 5 is obtained with scores of 33, and 42 respectivley. Bonus points do not apply to the mastery part of the exam.

Solutions will be posted on the course website on the first weekday following the exam. The exam is graded anonymously. Results are available on Ladok starting three weeks after the exam day. The first day on which you may contest your grade will be posted on the course website, and after that you may file a contest with the MV exp weekdays 9-13.

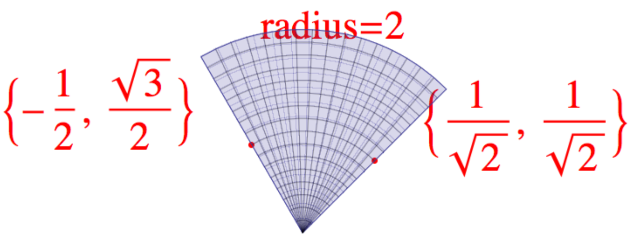
Passing Part

1. Consider the function $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2/9 + y^2}$.
   (a) (1 pt) Make a representative sketch of the graph of this function.
   (b) (2 pts) Write an equation which describes the family of level curves parametrized by the constant C. Draw the $C = \sqrt{2}$ level curve, labeling the axes intercepts. Sketch other representative level curves, but do not bother to figure out the intercepts for different C-values.
   (c) (3 pts) What is the gradient of $f(x, y)$? How does the gradient relate to the level curves? Include some representative gradient vectors in the appropriate sketch above.
   (d) (1 pt) What is the equation for the tangent plane at point $P = (3, 2)$?

2. (4 pts) Find the parametric curve $\bar{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$ of intersection between the surface $z = \cos^2(x)$ and the plane $x + y + z = 1$, in terms of the parameter $t = x$. Compute $d\bar{r}(t)/dt$.

3. (4 pts) Use the Lagrange multiplier method to find the minimum distance from the origin to the curve $x^2y = 16$ in the first quadrant.

4. (4 pts) Compute the Jacobian determinant for the coordinate transformation for polar coordinates $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Evaluate
$$\iint_R 3\frac{\exp(\sqrt{x^2+y^2}/2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dA$$
   over the region indicated in the figure.



5. (3 pts) Write the second order ODE $\frac{d^2f}{dt^2} = -1$ as a system of first order ODE. Make a representational sketch of the corresponding "phase vector field", and integral curves.

   OBS! Note that you are not asked to find explicit equations of the integral curves, only sketch them based on the vector field.

6. (4 pts) Consider the three vector fields on $\mathbb{R}^3$
$$\bar{F}(x, y, z) = -y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}, \quad \bar{G}(x, y, z) = -y\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}, \quad \bar{H}(x, y, z) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + 2z\hat{\mathbf{k}}.$$
   What are the divergence and curl of each vector field? Are any of the vector fields $\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}$ solenoidal, irrotational, or conservative? Specify the vector fields that have these properties.

7. Green's theorem:

   (a) (1 pt) What is the equation of Green's theorem?

   (b) (5 pts) The parametric curve $\bar{r}(t) = \sin(t)\hat{\mathbf{i}} + \sin(2t)\hat{\mathbf{j}}$ traces out a closed path in a clock-wise direction as t goes from 0 to π. Using the vector field $\bar{F} = -y\hat{\mathbf{i}}$ and Green's theorem find the area enclosed by this curve.

Mastery Part

1. (2 pts) Evaluate $\iint_W z dS$, where W is the surface of the sphere of radius a lying below the intersection of the sphere with the cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ and above the xy-plane.

2. (5 pts) Find the volume which is inside the ellipsoid $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ and inside the cone $z^2 = \frac{c^2}{3a^2b^2}(b^2x^2 + a^2y^2)$.

3. Conservative vector fields.

   (a) (3 pts) Prove that if $\bar{F}$ is a conservative smooth vector field, and $\mathcal{C}$ is a piecewise smooth curve, then $\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$ around any closed curve $\mathcal{C}$. Also prove that if $\oint_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$ around any closed curve $\mathcal{C}$, then $\int_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ for a curve $\mathcal{C}$ from point P to point Q depends only on the end points P, Q.

   (b) (3 pts) Evaluate the line integral $\int_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ for any curve from the point $P = (0, 1, 3)$ to $Q = (\pi/2, 2, 1)$, for $\bar{F} = (-\sin(x)e^y + yz)\hat{\mathbf{i}} + (\cos(x)e^y + xz)\hat{\mathbf{j}} + (z^2 + xy)\hat{\mathbf{k}}$.

4. Divergence theorem, and electric fields with symmetry.

   (a) (2 pts) State the divergence theorem.

   (b) (3 pts) Consider a sphere of uniform charge density λ, and radius R. Maxwell's time-independent equation says that $\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \kappa\lambda$ for a unit-dependent constant κ, where $\bar{E}$ is the electric field. Using symmetry and the divergence theorem, find the magnitude of the electric field both inside and outside the charged sphere. Make a sketch of your result.

Equations and Formulas MVE041, 14/15

Geometri

Circle radius a: $Area = \pi a^2$.
Sphere of radius a: $Vol. = \frac{4}{3}\pi a^3$, $Area = 4\pi a^2$

Cylinder radius a, height h: $Vol. = \pi a^2 h$, $Area = 2\pi ah$.
Circular cone rad. a, height h. $Vol. = 1/3\pi a^2 h$

Trigonometri

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$
$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Derivater

$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$,
$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$
$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}, x > 0$

$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$

$$\textbf{grad}\, f(x,y,z) = \bar{\nabla} f(x,y,z), \quad \textbf{div}\, \bar{\mathbf{F}}(x,y,z) = \bar{\nabla}\cdot\bar{\mathbf{F}}(x,y,z), \quad \textbf{curl}\, \bar{\mathbf{F}}(x,y,z) = \bar{\nabla}\times\bar{\mathbf{F}}(x,y,z)$$

Integrals

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C,$$
$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$
$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + C,$$

$$\int \sin^2(x)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C,$$
$$\int \cos^2(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C,$$

$$\int \sin^3(x)dx = -\frac{1}{3}\sin^2(x)\cos(x) - \frac{2}{3}\cos(x) + C,$$
$$\int \cos^3(x)dx = \frac{1}{3}\cos^2(x)\sin(x) + \frac{2}{3}\sin(x) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad (a > 0, |x| < a)$$
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C, \quad (a > 0)$$
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C, \quad (a > 0, |x| > a)$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}x^k$$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k$$