Tentamen i MVE041 och MMGL32 Flervariabelmatematik

Den 28 August 2015, kl. 830-1230

Hjälpmedel: Formelblad (bifogat), inga räknare.

Telefon: Frida Svelander, 0703-088304

Totalpoäng 50. För godkänt på tentan krävs antingen 25 utav 32 poäng på godkäntdelen, inklusive eventuella bonuspoäng. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. Maximalt poäng på godkäntdelen är 32 inklusive bonuspoäng. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdel

1. Betrakta funktionen $f(x,y) = 21x^2 - 7y$.
   (a) (4 pts) Bestäm derivatan av $f(x,y)$ i riktningen av vektorn $\bar{v} = 2\hat{\mathbf{\imath}} + 3\hat{\mathbf{\jmath}}$ i punkten $P = (\frac{1}{6}, 1)$?
   (b) (2 pts) För grafen $z = f(x,y)$, skriv en ekvation för nivåkurvan $z = 14$ och skissa den.

2. (3 pts) Bestäm alla kritiska punkter till funktionen $f(x,y) = xy - x + y^2$.

3. (4 pts) Låt $f(x,y) = x^3y + 3y^2$, och antag att $x = e^t, y = t^3$. Använd kjedjeregeln för att beräkna $\frac{d}{dt}z(t) = \frac{d}{dt}f(x(t), y(t))$ och skriv den som en funktion av endast t.

4. (3 pts) Låt $\mathcal{C}$ vara helix kurvan $\bar{r}(t) = 4\cos(t)\hat{\mathbf{\imath}} + 4\sin(t)\hat{\mathbf{\jmath}} + 3t\hat{\mathbf{k}}$ från $t = 0$ till $t = 2\pi$. Beräkna linjeintegralen (kurvintegralen) $I = \int_{\mathcal{C}} z ds$.

5. (4 pts) Bestäm volymen av området $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$?

6. Betrakta vektorfältet $\bar{G}(x,y) = \left(ye^{xy} + 3x^2y\right)\hat{\mathbf{\imath}} + \left(xe^{xy} + x^3\right)\hat{\mathbf{\jmath}}$.
   (a) (3 pts) Beräkna $\bar{\nabla} \cdot \bar{G}$ och $\bar{\nabla} \times \bar{G}$.
   (b) (3 pts) Bestäm en funktion ϕ så att $\bar{G} = \bar{\nabla}\phi$ och beräkna $\int_{\mathcal{C}} \bar{G} \cdot d\bar{r}$ för en godtycklig kurva $\mathcal{C}$ från $P = (0,5)$ till $Q = (1,2)$.

7. (6 pts) Skriv ner ekvationen från Greens sats. Låt $\bar{F}(x,y) = \left(\cos(x)\sin(y) - \frac{y^2x^2}{4}\right)\hat{\mathbf{\imath}} + \left(\sin(x)\cos(y) + \frac{yx^3}{6}\right)\hat{\mathbf{\jmath}}$. Beräkna $\int_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ där $\mathcal{C}$ är den slutna kurvan som begränsar triangeln med hörnen $(0,0)$, $(1,1)$, and $(0,1)$ orienterad moturs.

Överbetygsdel

8. (6 pts) Integrera $f(x,y) = xy$ över området i planet som definieras av $y > x^2$, $y < 5x^2$, och $1 < xy < 4$.

9. Extremvärden med bivillkor
   (a) (3 pts) Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan som definieras av $g(x,y) = 0$, och låt $P_0 = (x_0, y_0)$ vara en inre punkt på $\mathcal{C}$ där $\bar{\nabla}g$ är nollskilld och där $f(x,y)$ har ett lokalt extremvärde. Bevisa att det existerar ett λ_0 sådant att (x_0, y_0, λ_0) är en kritisk punkt till $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$.
   (b) (3 pts) Vad är största och minsta värde av $f(x,y) = x + y - x^2 - 3y^2$ på området definierat av $x^2 + 3y^2 \leq 1$?

10. (6 pts) Beräkna flödet av $\bar{F} = y\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{\imath}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{\imath}}\right)$ ut genom ytan $\{z = 1 - x^2 - y^2, x > 0, y > 0\}$. Kan man använda divergenssatsen i det här fallet? Varför eller varför inte?

Exam for MVE041 och MMGL32 Flervariabelmatematik

The 28 August 2015, kl. 830-1230

Help materials: Attached formula sheet. No calculators.

Telephone: Frida Svelander, 0703-088304

Total points are 50. Passing this course requires a) 25 points of 32 points on the *Passing Part*, and b) a pass on all six Matlab labs. Your bonus points from this course apply to the passing part of the exam. The maximum score on the passing part is 32 including bonus points. A grade of 4 or 5 is obtained with scores of 33, and 42 respectivley. Bonus points do not apply to the mastery part of the exam.

Solutions will be posted on the course website on the first weekday following the exam. The exam is graded anonymously. Results are available on Ladok starting three weeks after the exam day. The first day on which you may contest your grade will be posted on the course website, and after that you may file a contest with the MV exp weekdays 9-13.

Passing Part

1. Consider the function $f(x, y) = 21x^2 - 7y$.
   (a) (4 pts) What is the derivative of $f(x, y)$ in the direction of the vector $\bar{v} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ at the point $P = (\frac{1}{6}, 1)$?
   (b) (2 pts) For the graph $z = f(x, y)$, write the equation for the $z = 14$ level curve, and make a sketch.

2. (3 pts) Find all critical points of the function $f(x, y) = xy - x + y^2$.

3. (4 pts) Let $f(x, y) = x^3y + 3y^2$, and suppose $x = e^t, y = t^3$. Use the chain rule to compute $\frac{d}{dt}z(t) = \frac{d}{dt}f(x(t), y(t))$ and write as a function of t only.

4. (3 pts) Let $\mathcal{C}$ be the helical curve $\bar{r}(t) = 4\cos(t)\hat{\mathbf{i}} + 4\sin(t)\hat{\mathbf{j}} + 3t\hat{\mathbf{k}}$ from $t = 0$ to $t = 2\pi$. Compute the line integral $I = \int_{\mathcal{C}} z ds$.

5. (4 pts) What is the volume of the region $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$?

6. Consider the vector field $\bar{G}(x, y) = \left(ye^{xy} + 3x^2y\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(xe^{xy} + x^3\right)\hat{\mathbf{j}}$.
   (a) (3 pts) Compute $\bar{\nabla} \cdot \bar{G}$ and $\bar{\nabla} \times \bar{G}$.
   (b) (3 pts) Find a function ϕ such that $\bar{G} = \bar{\nabla}\phi$ and compute $\int_{\mathcal{C}} \bar{G} \cdot d\bar{r}$ for any curve $\mathcal{C}$ from $P = (0, 5)$ to $Q = (1, 2)$.

7. (6 pts) Write down the equation of Green's theorem. Let $\bar{F}(x, y) = \left(\cos(x)\sin(y) - \frac{y^2x^2}{4}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\sin(x)\cos(y) + \frac{yx^3}{6}\right)\hat{\mathbf{j}}$. Compute $\int_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ where $\mathcal{C}$ is the closed path bounding the triangle with corners $(0, 0)$, $(1, 1)$, and $(0, 1)$ oriented counterclockwise.

Mastery Part

8. (6 pts) Integrate $f(x, y) = xy$ over the region in the plane defined by $y > x^2$, $y < 5x^2$, and $1 < xy < 4$.

9. Extreme Values with Constraints
   (a) (3 pts) Let $\mathcal{C}$ be curve defined by $g(x, y) = 0$, and let $P_0 = (x_0, y_0)$ be an interior point on $\mathcal{C}$ at which $\bar{\nabla}g$ is non-vanishing and at which $f(x, y)$ has a local extreme value. Prove that there exists a λ_0 such that (x_0, y_0, λ_0) is a critical point of $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.
   (b) (3 pts) What are the maximum and minimum values of $f(x, y) = x + y - x^2 - 3y^2$ on the region defined by $x^2 + 3y^2 \leq 1$?

10. (6 pts) Compute the flux of $\bar{F} = y\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{i}}\right)$ out of the graph of the function $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ over the first quadrant. Does the divergence theorem apply in this case? Why or why not?

Equations and Formulas MVE041

Geometri

Cirkel av radie a: Område $= \pi a^2$.
Sfär av radie a: Vol. $= \frac{4}{3}\pi a^3$, Område $= 4\pi a^2$

Cylinder radie a, höjd h: Vol. $= \pi a^2 h$, Område $= 2\pi a h$.
Cirulär kon rad. a, höjd h. Vol. $= 1/3\pi a^2 h$

Trigonometri

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$
$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Derivater

$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$,
$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$
$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}, x > 0$

$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$

$$\mathbf{grad}\, f(x,y,z) = \bar{\nabla} f(x,y,z), \quad \mathbf{div}\, \bar{\mathbf{F}}(x,y,z) = \bar{\nabla}\cdot\bar{\mathbf{F}}(x,y,z), \quad \mathbf{curl}\, \bar{\mathbf{F}}(x,y,z) = \bar{\nabla}\times\bar{\mathbf{F}}(x,y,z)$$

Integrals

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C,$$
$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$
$$\int \ln(x) dx = x\ln(x) - x + C,$$

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C,$$
$$\int \cos^2(x) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C,$$

$$\int \sin^3(x) dx = -\frac{1}{3}\sin^2(x)\cos(x) - \frac{2}{3}\cos(x) + C,$$
$$\int \cos^3(x) dx = \frac{1}{3}\cos^2(x)\sin(x) + \frac{2}{3}\sin(x) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad (a > 0, |x| < a)$$
$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C, \quad (a > 0)$$
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C, \quad (a > 0, |x| > a)$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}x^k$$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$