Tentamen i MVE041 och MMGL32 Flervariabelmatematik

Den 06 April 2016, kl. 830-1230

Hjälpmedel: Formelblad (bifogat), inga räknare.

Telefon: Ellery Ames, 72 903 67 85

Totalpoäng 50. För att få godkänt på kursen krävs a) 25 poäng av 32 på Godkäntdelen, och b) godkänt på alla sex Matlab laborationer. Bonuspoängen räknas på godkänt delen. Maximalt antal poäng på godkäntdelen är 32 inklusive bonuspoäng. För betyg 4 eller 5 krävs 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar. Bonuspoäng räknas inte på överbetygsdelen.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdel

1. Betrakta funktionen $f(x,y) = \frac{(x+6)(y+8)}{\sqrt{x^2-y+1}}$.
   (a) (2 pts) Vad är definitionsmängden av $f(x,y)$?
   (b) (2 pts) Bestäm gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
   (c) (2 pts) Är $f(x,y)$ kontinuerlig vid $(0,0)$? Om så är fallet, varför?

2. För funktionen $f(x,y) = 2(x^2-y^2)+4xy$, bestäm
   (a) (2 pts) Gradienten av $f(x,y)$?
   (b) (2 pts) Summan av de andra partiella derivatorna $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$?

3. (5 pts) Bestäm största värdet av $f(x,y) = x^2+y^2$ med de begränsgingar $5x^2-6xy+5y^2=32$.

4. (4 pts) Integrera $f(x,y) = x^2y^2$ över området i första kvadranten mellan kurvorna $y = x^3$ och $x = y^3$.

5. (4 pts) På en viss del av berg- och dalbanan Helix på Liseberg åker besökarna enligt $\bar{\mathbf{r}}(t) = 10t\hat{\mathbf{i}} + 25\cos(2t)\hat{\mathbf{j}} + 25\sin(2t)\hat{\mathbf{k}}$ för $0 \le t \le 10$. Vad är hastigheten och accelerationen i det här avsnittet?

6. (4 pts) Integrera $\bar{\mathbf{F}} = y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} + 1\hat{\mathbf{k}}$ längs kurvan $\bar{\mathbf{r}}(t) = e^{2t}\hat{\mathbf{i}} + e^{t}\hat{\mathbf{j}} + e^{3t}\hat{\mathbf{k}}$ mellan $t=0$ och $t=1$.

7. (5 pts) Verifiera Gauss sats $\iiint_B \bar{\nabla}\cdot\bar{\mathbf{F}}\mathrm{dV} = \oiint_S \bar{\mathbf{F}}\cdot\bar{\mathbf{N}}\mathrm{dS}$ för vektorfältet $\bar{\mathbf{F}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{4}\hat{\mathbf{k}}$ och volymen B är $x^2+y^2+z^2 \le 1$. Observera att $\mathrm{dS} = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$ här.

Överbetygsdel

8. (6 pts) Låt $F(x,y,z) = x^2 + y - z\cos(y) + z^5 - \pi$, och betrakta nivå ytan $F(x,y,z) = 0$. Bestäm $\partial z/\partial x$ och $\partial z/\partial y$. Var är dessa derivator definierade? Kan denna yta skrivas som en graf $z = f(x,y)$ för någon funktion f? Om så är fallet, vad är den utåtriktade normalvektorn?

9. (6 pts) Integrera funktionen $f(x,y,z) = z$ över volymen av området som är begränsat av hyperboloiden $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ och planen $z=0$ och $z=2$.

10. Divergens och rotation
    (a) (3 pts) Ge enkla exempel i planet för ett vektorfält $\bar{\mathbf{F}}$ så att $\mathbf{div}\,\bar{\mathbf{F}} \neq 0$, men $\mathbf{curl}\,\bar{\mathbf{F}} = 0$, och ett vektorfält $\bar{\mathbf{G}}$ så att $\mathbf{div}\,\bar{\mathbf{G}} = 0$, men $\mathbf{curl}\,\bar{\mathbf{G}} \neq 0$. Ge en skiss av dina vektorfält.
    (b) (3 pts) Lå $\bar{\mathbf{F}} = F^1\hat{\mathbf{i}} + F^2\hat{\mathbf{j}} + F^3\hat{\mathbf{k}}$, och bevisa att $\mathbf{div}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = 0$. Vilka villkor på komponenterna i $\bar{\mathbf{F}}$ krävs?

Exam for MVE041 och MMGL32 Flervariabelmatematik

06 April 2016, kl. 830-1230

Help materials: Attached formula sheet. No calculators.

Telephone: Ellery Ames, 72 903 67 85

Total points are 50. Passing this course requires a) 25 points of 32 points on the *Passing Part*, and b) a pass on all six Matlab labs. Your bonus points from this course apply to the passing part of the exam. The maximum score on the passing part is 32 including bonus points. A grade of 4 or 5 is obtained with scores of 33, and 42 respectivley. Bonus points do not apply to the mastery part of the exam.

Solutions will be posted on the course website on the first weekday following the exam. The exam is graded anonymously. Results are available on Ladok starting three weeks after the exam day. The first day on which you may contest your grade will be posted on the course website, and after that you may file a contest with the MV exp weekdays 9-13.

Passing Part

1. Consider the function $f(x,y) = \frac{(x+6)(y+8)}{\sqrt{x^2-y+1}}$.
   (a) (2 pts) What is the domain of $f(x,y)$?
   (b) (2 pts) Evaluate the limit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
   (c) (2 pts) Is $f(x,y)$ continuous at $(0,0)$? If so, why?

2. For the function $f(x,y) = 2(x^2 - y^2) + 4xy$,
   (a) (2 pts) What is the gradient of $f(x,y)$?
   (b) (2 pts) What is the sum of the second partial derivatives $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$?

3. (5 pts) What is the maximum value of $f(x,y) = x^2 + y^2$ subject to the constraints $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 32$?

4. (4 pts) Integrate the function $f(x,y) = x^2y^2$ over the region in the first quadrant between the curves $y = x^3$ and $x = y^3$.

5. (4 pts) On a particular section of the Helix roller coaster at Liseberg visitors travel the path $\bar{\mathbf{r}}(t) = 10t\hat{\mathbf{\imath}} + 25\cos(2t)\hat{\mathbf{\jmath}} + 25\sin(2t)\hat{\mathbf{k}}$, for $0 \le t \le 10$. What are the velocity and acceleration of the riders in this section?

6. (4 pts) Integrate $\bar{\mathbf{F}} = y\hat{\mathbf{\imath}} + x\hat{\mathbf{\jmath}} + 1\hat{\mathbf{k}}$ along the curve $\bar{\mathbf{r}}(t) = e^{2t}\hat{\mathbf{\imath}} + e^t\hat{\mathbf{\jmath}} + e^{3t}\hat{\mathbf{k}}$ between $t = 0$ and $t = 1$.

7. (5 pts) Verify the divergence theorem $\iiint_B \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{F}} \mathrm{dV} = \oiint_S \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{N}} \mathrm{dS}$ for the vector field $\bar{\mathbf{F}} = x\hat{\mathbf{\imath}} + y\hat{\mathbf{\jmath}} + \frac{z}{4}\hat{\mathbf{k}}$ and where B is the region $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$. Note that $\mathrm{dS} = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$ here.

Mastery Part

8. (6 pts) Let $F(x,y,z) = x^2 + y - z\cos(y) + z^5 - \pi$, and consider the level surface $F(x,y,z) = 0$. Compute $\partial z/\partial x$ and $\partial z/\partial y$. Where are these derivatives defined? Can this level surface be written as a graph $z = f(x,y)$ for some function f? If so, what is the outward pointing normal vector?

9. (6 pts) Integrate the function $f(x,y,z) = z$ over the volume of the region bounded by the hyperboloid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ and the planes $z = 0$ and $z = 2$.

10. Divergence and curl
    (a) (3 pts) Give simple examples in the plane of a vector field $\bar{\mathbf{F}}$ such that $\mathbf{div}\,\bar{\mathbf{F}} \ne 0$, but $\mathbf{curl}\,\bar{\mathbf{F}} = 0$, and a vector field $\bar{\mathbf{G}}$ such that $\mathbf{div}\,\bar{\mathbf{G}} = 0$, but $\mathbf{curl}\,\bar{\mathbf{G}} \ne 0$. Provide a sketch of your vector fields.
    (b) (3 pts) Let $\bar{\mathbf{F}} = F^1\hat{\mathbf{\imath}} + F^2\hat{\mathbf{\jmath}} + F^3\hat{\mathbf{k}}$ and prove that $\mathbf{div}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = 0$. What conditions on the components of $\bar{\mathbf{F}}$ are required?

Equations and Formulas MVE041

Geometri

Cirkel av radie a: Område $= \pi a^2$.
Sfär av radie a: Vol. $= \frac{4}{3}\pi a^3$, Område $= 4\pi a^2$

Cylinder radie a, höjd h: Vol. $= \pi a^2 h$, Område $= 2\pi a h$.
Cirulär kon rad. a, höjd h. Vol. $= 1/3\pi a^2 h$

Trigonometri

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$
$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Derivater

$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$,
$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$
$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}, x > 0$

$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$

$$\mathbf{grad}\, f(x,y,z) = \bar{\nabla} f(x,y,z), \quad \mathbf{div}\, \bar{\mathbf{F}}(x,y,z) = \bar{\nabla}\cdot\bar{\mathbf{F}}(x,y,z), \quad \mathbf{curl}\, \bar{\mathbf{F}}(x,y,z) = \bar{\nabla}\times\bar{\mathbf{F}}(x,y,z)$$

Integrals

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C,$$
$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$
$$\int \ln(x) dx = x\ln(x) - x + C,$$

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C,$$
$$\int \cos^2(x) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C,$$

$$\int \sin^3(x) dx = -\frac{1}{3}\sin^2(x)\cos(x) - \frac{2}{3}\cos(x) + C,$$
$$\int \cos^3(x) dx = \frac{1}{3}\cos^2(x)\sin(x) + \frac{2}{3}\sin(x) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad (a > 0, |x| < a)$$
$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C, \quad (a > 0)$$
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C, \quad (a > 0, |x| > a)$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}x^k$$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$