Solutions

Tentamen i MVE041 och MMGL32 Flervariabelmatematik

Den 06 April 2016, kl. 830-1230

Hjälpmedel: Formelblad (bifogat), inga räknare.

Telefon: Ellery Ames, 72 903 67 85

Totalpoäng 50. För att få godkänt på kursen krävs a) 25 poäng av 32 på Godkäntdelen, och b) godkänt på alla sex Matlab laborationer. Bonuspoängen räknas på godkänt delen. Maximalt antal poäng på godkäntdelen är 32 inklusive bonuspoäng. För betyg 4 eller 5 krävs 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar. Bonuspoäng räknas inte på överbetygsdelen.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdel

1. Betrakta funktionen $f(x,y) = \frac{(x+6)(y+8)}{\sqrt{x^2-y+1}}$.
   (a) (2 pts) Vad är definitionsmängden av $f(x,y)$?
   (b) (2 pts) Bestäm gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
   (c) (2 pts) Är $f(x,y)$ kontinuerlig vid $(0,0)$? Om så är fallet, varför?

2. För funktionen $f(x,y) = 2(x^2-y^2)+4xy$, bestäm
   (a) (2 pts) Gradienten av $f(x,y)$?
   (b) (2 pts) Summan av de andra partiella derivatorna $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)$?

3. (5 pts) Bestäm största värdet av $f(x,y) = x^2+y^2$ med de begränsgingar $5x^2-6xy+5y^2 = 32$.

4. (4 pts) Integrera $f(x,y) = x^2y^2$ över området i första kvadranten mellan kurvorna $y = x^3$ och $x = y^3$.

5. (4 pts) På en viss del av berg- och dalbanan Helix på Liseberg åker besökarna enligt $\bar{\mathbf{r}}(t) = 10t\hat{\imath} + 25\cos(2t)\hat{\jmath} + 25\sin(2t)\hat{\mathbf{k}}$ för $0 \le t \le 10$. Vad är hastigheten och accelerationen i det här avsnittet?

6. (4 pts) Integrera $\bar{\mathbf{F}} = y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + 1\hat{\mathbf{k}}$ längs kurvan $\bar{\mathbf{r}}(t) = e^{2t}\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + e^{3t}\hat{\mathbf{k}}$ mellan $t=0$ och $t=1$.

7. (5 pts) Verifiera Gauss sats $\iiint_B \bar{\nabla}\cdot\bar{\mathbf{F}}\mathrm{dV} = \oiint_S \bar{\mathbf{F}}\cdot\bar{\mathbf{N}}\mathrm{dS}$ för vektorfältet $\bar{\mathbf{F}} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + \frac{z}{4}\hat{\mathbf{k}}$ och volymen B är $x^2+y^2+z^2 \le 1$. Observera att $\mathrm{dS} = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ här.

Överbetygsdel

8. (6 pts) Låt $F(x,y,z) = x^2+y-z\cos(y)+z^5-\pi$, och betrakta nivå ytan $F(x,y,z)=0$. Bestäm $\partial z/\partial x$ och $\partial z/\partial y$. Var är dessa derivator definierade? Kan denna yta skrivas som en graf $z = f(x,y)$ för någon funktion f? Om så är fallet, vad är den utåtriktade normalvektorn?

9. (6 pts) Integrera funktionen $f(x,y,z) = z$ över volymen av området som är begränsat av hyperboloiden $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2 = 1$ och planen $z=0$ och $z=2$.

10. Divergens och rotation
    (a) (3 pts) Ge enkla exempel i planet för ett vektorfält $\bar{\mathbf{F}}$ så att $\mathbf{div}\,\bar{\mathbf{F}} \neq 0$, men $\mathbf{curl}\,\bar{\mathbf{F}} = 0$, och ett vektorfält $\bar{\mathbf{G}}$ så att $\mathbf{div}\,\bar{\mathbf{G}} = 0$, men $\mathbf{curl}\,\bar{\mathbf{G}} \neq 0$. Ge en skiss av dina vektorfält.
    (b) (3 pts) Lå $\bar{\mathbf{F}} = F^1\hat{\imath} + F^2\hat{\jmath} + F^3\hat{\mathbf{k}}$, och bevisa att $\mathbf{div}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = 0$. Vilka villkor på komponenterna i $\bar{\mathbf{F}}$ krävs?

#1

$$f(x,y) = \frac{(x+6)(y+8)}{\sqrt{x^2-y+1}}$$

a) $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+1-y > 0\}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+6)(y+8) = 48$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2-y+1} = 1$

$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{48}{1} = \boxed{48}$

c) f is continuous since $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

#2

$$f(x,y) = 2(x^2-y^2)+4xy$$

a) $\vec{\nabla} f = \partial_x f\,\hat{i} + \partial_y f\,\hat{j}$

$= (4x+4y)\,\hat{i} + (-4y+4x)\,\hat{j}$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4 \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0}$

#3

Use Lagrange multiplier. Let

$$L(x,y,\lambda) = x^2+y^2 + \lambda(5x^2-6xy+5y^2-32)$$

Then

A) $0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 10x\lambda - 6y\lambda$

B) $0 = \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 10y\lambda - 6x\lambda$

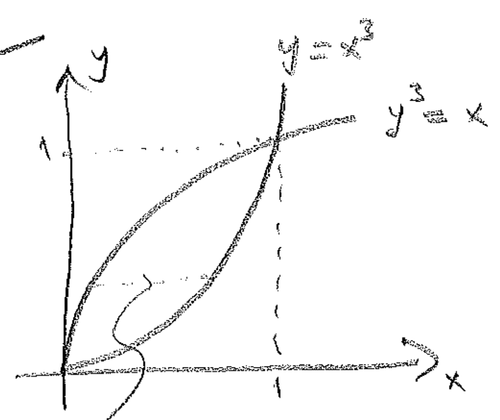
$$\Rightarrow (2+10\lambda) = \lambda 6 \frac{y}{x} = \lambda 6 \frac{x}{y} \Rightarrow y^2 = x^2$$

C) $0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32$

$y = x$: C) $\Rightarrow 4x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow \boxed{f = 16 \text{ max!}}$

$y = -x$: C) $\Rightarrow 16x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \boxed{f = 4 \text{ min}}$

#4



integrate in x-direction first.
Can also do y-direction.

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y^3}^{y^{1/3}} x^2 y^2 \, dx \right) dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 y^2 (y - y^9)\, dy$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{36}$$

$$= \frac{3}{36} - \frac{1}{36}$$

$$\boxed{= 1/18}$$

#5

$$\bar{r}(t) = 10t\,\hat{i} + 25\cos(2t)\,\hat{j} + 25\sin(2t)\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{v}(t) = 10\,\hat{i} - 50\sin(2t)\,\hat{j} + 50\cos(2t)\,\hat{k} \\ \bar{a}(t) = 0\,\hat{i} - 100\cos(2t)\,\hat{j} - 100\sin(2t)\,\hat{k} \end{cases}$$

#6

$$I = \int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_0^1 \bar{F}\cdot\bar{v}(t)\,dt$$

where C is described by

$$\bar{r}(t) = e^{2t}\,\hat{i} + e^{t}\,\hat{j} + e^{3t}\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \bar{v}(t) = 2e^{2t}\,\hat{i} + e^{t}\,\hat{j} + 3e^{3t}\,\hat{k}$$

and where

$$\bar{F} = y\,\hat{i} + x\,\hat{j} + 1\,\hat{k} = e^{t}\,\hat{i} + e^{2t}\,\hat{j} + 1\,\hat{k}$$

$$\therefore \bar{F}\cdot\bar{v} = 2e^{3t} + e^{3t} + 3e^{3t} = 6e^{3t}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 6e^{3t}\,dt = \boxed{2\,(e^{3} - 1)}$$

7

Left-hand side

$$\operatorname{div} \bar{F} = \bar{\nabla} \cdot \bar{F} = 1 + 1 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \iiint_B \bar{\nabla} \cdot \bar{F} \, dV = \frac{9}{4} \operatorname{Vol}(B) = \frac{9}{4} \frac{4}{3}\pi = \underline{3\pi}$$

Right-hand side

Outward normal $\quad \bar{N} = \dfrac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ on sphere of radius 1.

$$\Rightarrow \bar{F} \cdot \bar{N}\Big|_S = \left(x^2 + y^2 + z^2/4\right)\Big|_S = 1 - \frac{3}{4} z^2$$

↑ sphere of radius 1

$$\oiint_S \bar{F} \cdot \bar{N} \, dS = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(1 - \frac{3}{4} z^2\right) \sin\theta \, d\phi \, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{3}{4}\cos^2\theta\right) \sin\theta \, d\theta \, , \quad z = r\cos\theta, \; r = 1$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{3}{4} u^2\right) du, \quad u = \cos\theta, \; du = -\sin\theta \, d\theta$$

$$= 2\pi \underbrace{\left[2 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)(2)\right]}_{3/2}$$

$$= \underline{3\pi}$$

Thus LHS = RHS ✓

#8

$$F(x,y,z) = x^2 + y - z\cos(y) + z^5 - \pi$$

Think of z as implicit function of (x,y)

$$F(x,y,z(x,y)) = 0 \quad , \text{ specified level surface.}$$

Then, $0 = \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

and similarly $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

We have

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + z\sin(y) \; , \; \frac{\partial F}{\partial z} = -\cos(y) + 5z^4$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{5z^4 - \cos(y)} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 + z\sin(y)}{5z^4 - \cos(y)}$$

Provided $\quad 5z^4 - \cos(y) \neq 0 \qquad (*)$

By the implicit function theorem there exists a $f(x,y)$ such that $z = f(x,y)$ near all points satisfying $(*)$.

At such points, the outward normal vector is

$$\vec{N} = -f_1\,\hat{i} - f_2\,\hat{j} + 1\,\hat{k} = \left(-\frac{2x}{5z^4 - \cos(y)}\right)\hat{i} + -\left(\frac{1 + z\sin y}{5z^4 - \cos(y)}\right)\hat{j}$$
$$+ 1\,\hat{k}$$

#9

$$I = \iiint_R z\,dx\,dy\,dz,$$ where R is defined by

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2 \le 1$$

$$0 \le z \le 2$$

Change variables: $x = 2u$, $y = 3v$

$$\Rightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$ Jacobian determinant.

Region in (u,v,z)-space $u^2+v^2-z^2 \le 1$, $0 \le z \le 2$
call it B

$$I = \iiint_B z\, 6\, du\,dv\,dz$$

$$= 6\int_0^2\int_0^{\sqrt{1+z^2}}\int_0^{2\pi} z\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

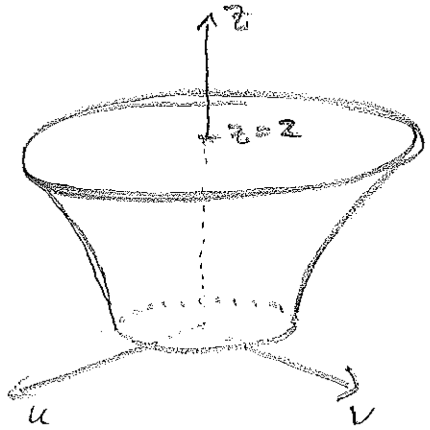
$$= 12\pi\int_0^2\int_0^{\sqrt{1+z^2}} z\, r\,dr\,dz$$

$$= 12\pi\int_0^2 z\,\frac{1}{2}\left(1+z^2\right)dz$$

$$= 6\pi\int_0^2 (z+z^3)\,dz$$

$$= 6\pi\,(2+4)$$

$$\boxed{= 36\pi}$$



Polar coordinates (r,θ)
$u = r\cos\theta$
$v = r\sin\theta$
$\Rightarrow r^2 - z^2 = 1$ is hyperboloid

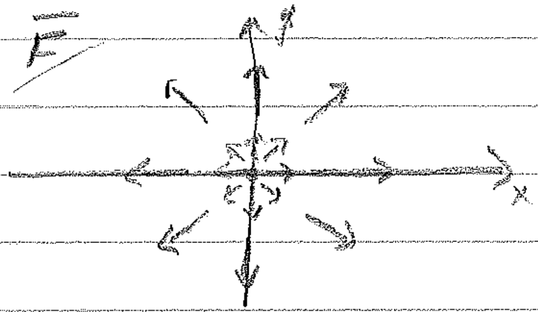
#10

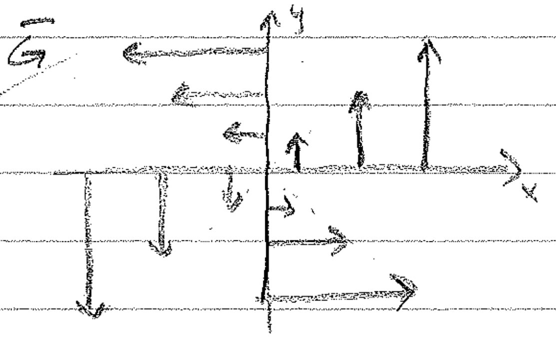
a) $\bar{F} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$\operatorname{div} \bar{F} = 2$, $\operatorname{curl} \bar{F} = \dfrac{\partial F^2}{\partial x} - \dfrac{\partial F^1}{\partial y} = 0$

$\bar{G} = -y\hat{i} + x\hat{j}$

$\operatorname{div} \bar{G} = 0$, $\operatorname{curl} \bar{G} = \dfrac{\partial F^2}{\partial x} - \dfrac{\partial F^1}{\partial y} = 2$





b) Let $\bar{G} = \operatorname{curl} \bar{F} = \left(\dfrac{\partial F^3}{\partial y} - \dfrac{\partial F^2}{\partial z}\right)\hat{i} - \left(\dfrac{\partial F^3}{\partial x} - \dfrac{\partial F^1}{\partial z}\right)\hat{j}$

$+ \left(\dfrac{\partial F^2}{\partial x} - \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\right)\hat{k}$

Then $\operatorname{div} \bar{G} = \dfrac{\partial}{\partial x} G^1 + \dfrac{\partial}{\partial y} G^2 + \dfrac{\partial}{\partial z} G^3$

$$= \frac{\partial F^3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial F^1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial F^2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial z \partial y}$$

$$= \left(\frac{\partial F^3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F^3}{\partial y \partial x}\right) + \left(\frac{\partial F^2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial F^2}{\partial x \partial z}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial F^1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial F^1}{\partial z \partial y}\right)$$

$= 0$ if all second partial derivatives of F^1, F^2, F^3 are continuous at the point in question, and all first partial derivatives of F^1, F^2, F^3 are continuous in a neighborhood of the point.