MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: inga, inte ens miniräknare
Datum: 2017–04–07 kl. 08.30 – 09.30

Flervariabelsanalys, Salsdugga 1

NAMN: Hossein Raufi

Personnummer: ....

Uppgift	Poäng
1	1
2	1
3	2
4	2
SUMMA:	6

Utmärkt!

1. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan (1 p)

$$z(1+x^2) = 1 + y^3 \quad (*)$$

i punkten $(1,1,1)$.

Lösning: Låt $f(x,y,z) = z + zx^2 - y^3 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow f = 1$

$\nabla f = (2xz, -3y^2, 1+x^2) \Rightarrow \nabla f(1,1,1) = (2,-3,2)$

$\Rightarrow \pi : 2x - 3y + 2z = D$

$(1,1,1) \in \pi \Rightarrow D = 2 - 3 + 2 = 1$

$\therefore \underline{\underline{2x - 3y + 2z = 1}}$

1p

2. Bestäm riktningsderivatan av $f(x,y) = xy + \ln(x^2+y^2)$ i punkten $(1,1)$ i den riktning i vilken f växer som snabbast. (1 p)

Lösning:

$\hat{u} = \dfrac{\nabla f(1,1)}{|\nabla f(1,1)|} \leftarrow$ f växer som snabbast i denna riktning

$\Rightarrow D_{\hat{u}} f(1,1) = \hat{u} \cdot \nabla f(1,1) = |\nabla f(1,1)|$

$\nabla f = \left(y + \dfrac{2x}{x^2+y^2},\ x + \dfrac{2y}{x^2+y^2} \right) \Rightarrow \nabla f(1,1) = (2,2)$

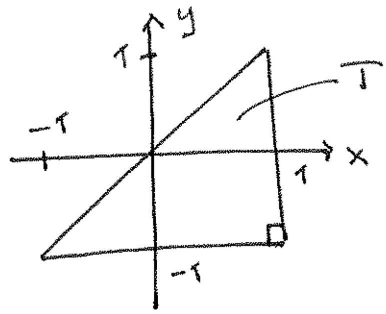
$\therefore D_{\hat{u}} f(1,1) = |(2,2)| = \sqrt{4+4} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$

1p

3. Beräkna det största och minsta värdet på funktionen (2 p)

$$f(x,y) = (x-1)(y+1)(x-y)$$

på den slutna triangeln med hörnen $(1,1)$, $(-1,-1)$ och $(1,-1)$.



Lösning:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y+1)(x-y) + (x-1)(y+1) = $$
$$= (y+1)(2x-y-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x-1)(x-y) - (x-1)(y+1) = $$
$$= (x-1)(x-2y-1)$$

$\leftarrow$ Inga singulära punkter

Kritiska punkter:

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} (y+1)(2x-y-1) = 0 \Rightarrow y = -1 \in \partial T \text{ eller } y = 2x-1 \\ (x-1)(x-2y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{y = 2x-1}: \quad (x-1)(x-2\cdot(2x-1)-1) = 0 \Rightarrow \{x = 1 \in \partial T\}$$

$$\Rightarrow x - 4x + 2 - 1 = 0 \iff -3x + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y = 2x - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \in T \text{ kritisk punkt}$$

Randpunkter: $f|_{\partial T} = 0$

$$f\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(-\frac{1}{3} + 1\right)\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) =$$
$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = -\frac{8}{27}$$

$\therefore$ Max. värde: 0

Min. värde: $-8/27$

/2p

4. Uttryck (2 p)

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x^2 + y^2, xy^2),$$

i termer av partiella derivator av f.

Lösning: $\frac{\partial}{\partial y} f(x^2+y^2, xy^2) = f_1 \cdot 2y + f_2 \cdot 2xy$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = \frac{\partial}{\partial y}\left(2y f_1 + 2xy f_2\right) =$$

$$= 2f_1 + 2y\left(f_{11} \cdot 2y + f_{12} \cdot 2xy\right) + 2x f_2 +$$

$$+ 2xy\left(f_{21} \cdot 2y + f_{22} \cdot 2xy\right) =$$

$$= 2f_1 + 2x f_2 + 4y^2 f_{11} + 4xy^2 f_{12} + 4xy^2 f_{21} + 4x^2y^2 f_{22} =$$

$$= \{ f_{12} = f_{21} \} =$$

$$= 2f_1 + 2x f_2 + 4y^2 f_{11} + 8xy^2 f_{12} + 4x^2y^2 f_{22}$$

/2p