MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa
Datum: 2017–04–07 kl. 08.XX – 09.XX

Flervariabelsanalys, Salsdugga 1

Övningsdugga

NAMN: Hossein Raufi

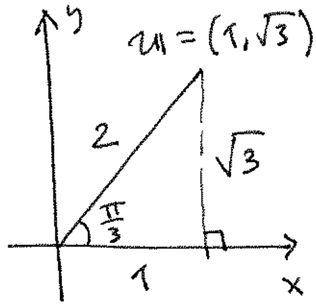
Personnummer: ....

Uppgift	Poäng
1	1
2	1
3	2
4	2
SUMMA:	6

Utmärkt!

1. Bestäm riktningsderivatan av $f(x,y) = 2x + y + \ln(1+xy)$ i punkten (0,0) i den riktning som bildar vinkeln $\frac{\pi}{3}$ moturs från positiva x-axeln. (1 p)

Lösning: Vill beräkna



$$D_{\hat{u}_1} f(0,0) = \hat{u}_1 \cdot \nabla f(0,0) = \frac{u_1}{|u_1|} \cdot \nabla f(0,0)$$

$$\nabla f = \left(2 + \frac{y}{1+xy},\ 1 + \frac{x}{1+xy}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (2, 1)$$

$$\hat{u}_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore D_{\hat{u}_1} f(0,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (2,1) = \underline{\underline{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

/ 1p

2. Beräkna en tangentvektor i punkten $(1,-1,1)$, till skärningskurvan mellan de två ytorna $x^2 + y^2 = 2$ och $y^2 + z^2 = 2$. (1 p)

Lösning: Låt $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, $g(x,y,z) = y^2 + z^2$

$\nabla f(1,-1,1) = (2,-2,0)$ normalvektor till $x^2 + y^2 = 2$ i $(1,-1,1)$.

$\nabla g(1,-1,1) = (0,-2,2)$ normalvektor till $y^2 + z^2 = 2$ i $(1,-1,1)$.

$\mathbb{T}$ tangentvektor $\Leftrightarrow$ $\mathbb{T} \perp \nabla f(1,-1,1)$ & $\mathbb{T} \perp \nabla g(1,-1,1)$

$\Rightarrow \mathbb{T} \parallel \nabla f \times \nabla g$

$$\nabla f \times \cancel{g} \nabla g = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-4, -4, -4)$$

/ 1p

$\therefore \mathbb{T} = (1,1,1)$ (längden av $\mathbb{T}$ är irrelevant!)

3. Bestäm värdemängden av funktionen (2 p)

$$f(x, y, z) = x - z$$

på ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 2 + y$.

Bra!

Lösning: f kont. $\Rightarrow V_f$ = alla värden mellan min. och max. av f (satsen om mellanliggande värden)

Vill alltså optimera $f = x - z$ med bivillkoret $x^2 + y^2 + z^2 - y - 2 = 0$.

$$\Rightarrow L(x, y, z, \lambda) = x - z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - y - 2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2x\lambda = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y\lambda - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(2y - 1) = 0 \overset{\lambda \neq 0}{\Longrightarrow} y = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -1 + 2z\lambda = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - y - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\cancel{4}\lambda^2} = \frac{9}{\cancel{4}} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = \left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$f(x_1, y_1, z_1) = -\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{\cancel{2} \cdot 3}{\cancel{2}\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$f(x_2, y_2, z_2) = \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2} \cdot 3}{\cancel{2}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore V_f = \left[-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$$

/2p

4. Visa att om $f(x, y)$ är harmonisk, så är även $z = f(x^2 - y^2, 2xy)$ harmonisk, det vill säga (2 p)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Lösning: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x^2-y^2, 2xy) = f_1 \cdot 2x + f_2 \cdot 2y$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x f_1 + 2y f_2) = 2f_1 + 2x(f_{11} \cdot 2x + f_{12} \cdot 2y) +$$

$$+ 2y(f_{21} \cdot 2x + f_{22} \cdot 2y) = 2f_1 + 4x^2 f_{11} + 4y^2 f_{22} + 8xy f_{12}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x^2-y^2, 2xy) = f_1 \cdot (-2y) + f_2 \cdot 2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-2y f_1 + 2x f_2) = -2f_1 - 2y(f_{11} \cdot (-2y) + f_{12} \cdot 2x) +$$

$$+ 2x(f_{21} \cdot (-2y) + f_{22} \cdot 2x) =$$

$$= -2f_1 + 4y^2 f_{11} + 4x^2 f_{22} - 8xy f_{12}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \cancel{2f_1} + 4x^2 f_{11} + 4y^2 f_{22} + \cancel{8xy f_{12}} \cancel{-2f_1} + 4y^2 f_{11} +$$

$$+ 4x^2 f_{22} \cancel{- 8xy f_{12}} =$$

$$= 4x^2(f_{11} + f_{22}) + 4y^2(f_{11} + f_{22}) =$$

$$= \{ f \text{ harmonisk} \Leftrightarrow f_{11} + f_{22} = 0 \} = 0 \quad \blacksquare$$

/2p