Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Tentamen
2018-05-28, 8:30–12:30

# MVE041: Flervariabelmatematik

**Examinator:** Lukáš Malý, tel. 031 - 772 53 42
**Telefonvakt:** Jonatan Kallus, tel. 031 - 772 53 25
**Hjälpmedel:** Skrivdon, linjal och formler på tentatesens baksida. Inga miniräknare är tillåtna.

---

**Betygsgränser:** För betyg 3 krävs 20 p; för betyg 4 krävs 30 p; för betyg 5 krävs 40 p (utav 50 p).
**Lösningsförslag** publiceras på kurshemsidan idag kl. 14:30.
**Granskningstillfälle** meddelas via kurshemsidan och mail/meddelande från PING PONG.

---

**OBS:** Alla svar skall vara väl motiverade. Bristande motiveringar kan orsaka poängavdrag.

**1.** Avgör om följande gränsvärden existerar: (4p)

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^2}{2x^2 + y^2} \qquad \text{(b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-2x^2 + y^4 - y^2}{2x^2 + y^2}$$

**2.** Låt $f(x, y) = x^3 - y^2 - 6xy$.

(a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, -1, 6)$. (2p)

(b) I vilken riktning växer $f$ som snabbast i punkten $(-1, 2, 7)$? (2p)

(c) Finn alla stationära punkter till funktionen $f$ och bestäm deras karaktär. (3p)

**3.** Bestäm värdemängden till funktionen $f(x, y) = xy$ då definitionsmängden består av de punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller ekvationen $x^2 + 4y^2 = 4$. (5p)

**4.** Bestäm den lösning till den partiella differentialekvationen (5p)

$$2t\frac{\partial f}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial f}{\partial t} = 4t + 12x^2 t, \qquad (x \in \mathbb{R},\ t > 0)$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $f(x, 0) = 2x$.

*Tips:* Använd ansatsen $f(x, t) = g(x + t^2, x^3 - t^2)$, där $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är en kontinuerligt differentierbar funktion.

**5.** En sluten plan kurva (den så kallade *kardioiden*) parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t - \cos(2t) - 1 \\ 2\sin t - \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad \text{där } t \in [0, 2\pi].$$

(a) Bestäm kurvans längd. (3p)

(b) Beräkna arean av området inuti kardioiden med hjälp av Greens sats. (3p)

**OBS:** Trigonometriska formler finns på baksidan.

**6.** Beräkna arean av den del av paraboloiden $z = x^2 + y^2$, där $4 \le z \le 9$ samt $y \ge x$. (6p)

**Var god vänd!**

**7.** Avgör om vektorfältet (6p)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{z}{1+x+y} + 2\cos(2x) \\ \frac{z}{1+x+y} + e^{-z} \\ \ln(1+x+y) - ye^{-z} \end{pmatrix}$$

är konservativt i första oktanten, d.v.s. i det område där $x, y, z \geq 0$.

Beräkna sedan kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, där $C$ är sträckan som går från punkten $(\pi, 1, 2)$ till punkten $(2\pi, 2, 1)$.

**8.** Låt kroppen $K$ vara den del av klotet som beskrivs av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $x \geq 0$ och $y \geq 0$. Beräkna det totala flödet av vektorfältet (6p)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz^2 - y\cos z \\ xe^z - x^2 y \\ \ln(1+x^2+y^2) - y^2 z \end{pmatrix}$$

genom kroppens yta inåt, d.v.s. beräkna $\oiint_{\partial K} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS$, där normalvektorerna pekar inåt.

**9.** Antag att $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ och $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är två kontinuerligt differentierbara vektorfält som sammanfaller i $xy$-planet, d.v.s. $\mathbf{F}(x,y,0) = \mathbf{G}(x,y,0)$ gäller för alla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Låt $S$ vara den övre halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, där $z \geq 0$. (5p)
Låt $T$ vara den undre halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, där $z \leq 0$.

(a) Bestäm sambandet mellan flöden

$$\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS \qquad \text{och} \qquad \iint_T (\operatorname{curl} \mathbf{G}) \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

där normalvektorerna i båda flödesintegralerna pekar bort från origo.

(b) Antag dessutom att $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ och $\operatorname{div} \mathbf{G} = 0$ i hela rummet $\mathbb{R}^3$. Bestäm sambandet mellan flöden

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS \qquad \text{och} \qquad \iint_T \mathbf{G} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

där normalvektorerna i båda flödesintegralerna pekar bort från origo.

Lycka till!

**Några trigonometriska formler**

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

---

$$\sqrt{1-\cos v} = \sqrt{2}\sin(\tfrac{v}{2}),\ \ v \in [0, 2\pi], \qquad \sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$
$$\sqrt{1+\cos w} = \sqrt{2}\cos(\tfrac{w}{2}),\ \ w \in [-\pi, \pi], \qquad \cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$