MVE041: Flervariabelmatematik

Uppgift 1. (a) Man börjar med att undersöka funktionsuttrycket på vägen mot origo längs raka linjer $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x^3 - y^2}{2x^2 + y^2} = \Big/ y = kx \Big/ = \frac{x^3 - k^2x^2}{2x^2 + k^2x^2} = \frac{x - k^2}{2 + k^2} \to \frac{0 - k^2}{2 + k^2} \quad \text{då } x \to 0.$$

Gränsvärdet längs linjer beror på vilken linje som följs, vilket innebär att det givna gränsvärdet INTE existerar.

Anmärkning till (a): Det räcker att undersöka funktionen längs två linjer: $x = 0$, resp. $y = 0$.

(b) Man börjar med att undersöka funktionsuttrycket på vägen mot origo längs raka linjer $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\frac{-2x^2 + y^4 - y^2}{2x^2 + y^2} = \Big/ y = kx \Big/ &= \frac{-2x^2 + k^4x^4 - k^2x^2}{2x^2 + k^2x^2} \\ &= \frac{-2 + k^4x^2 - k^2}{2 + k^2} \to \frac{-2 + k^2 \cdot 0 - k^2}{2 + k^2} = -1 \quad \text{då } x \to 0.\end{aligned}$$

Då har man hittat en kandidat för gränsvärdet. Nu ska man uppskatta

$$\left|\frac{-2x^2 + y^4 - y^2}{2x^2 + y^2} - (-1)\right| = \left|\frac{y^4}{2x^2 + y^2}\right| = \frac{(y^2)^2}{2x^2 + y^2} \le \frac{(2x^2 + y^2)^2}{2x^2 + y^2} = 2x^2 + y^2.$$

Polynomet $2x^2 + y^2$ är kontinuerligt och går mot 0 då $(x, y) \to (0, 0)$. Enligt instängningsregeln existerar det givna gränsvärdet och är lika med -1.

Anmärkningar till (b): Det räcker att undersöka funktionsuttrycket längs den vågräta linjen $y = 0$ (eller den lodräta linjen $x = 0$) för att få fram kandidaten.

Uppskattningen $y^4/(2x^2 + y^2) \le y^4/y^2 = y^2$ funkar också bra. I så fall borde man nog motivera att y^2 funkar som en övre gräns även om $y = 0$.

Uppgift 2. Gradienten till f är $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 6y, -2y - 6x)$.

(a) $\nabla f(1, -1) = (3 \cdot 1^2 - 6(-1), -2(-1) - 6 \cdot 1) = (9, -4)$. Tangentplanet ges av linjäriseringen

$$z = f(1, -1) + \nabla f(1, -1) \bullet \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - (-1) \end{pmatrix} = 6 + 9(x - 1) - 4(y + 1) = -7 + 9x - 4y.$$

Tangentplanets ekvation är alltså $9x - 4y - z = 7$.

(b) $\nabla f(-1, 2) = (3(-1)^2 - 6 \cdot 2, -2 \cdot 2 - 6(-1)) = (-9, 2)$ är riktningen i vilken f växer som snabbast.

(c) Stationära punkter löser ekvationssystemet $\nabla f(x, y) = \vec{0}$, d.v.s.

$$\begin{array}{lllll} 3x^2 - 6y = 0 & \Rightarrow & \cdots & \Rightarrow 3x^2 - 6 \cdot (-3x) = 0 & \Leftrightarrow \quad 3x(x + 6) = 0 \\ -2y - 6x = 0 & \Rightarrow & y = -3x \nearrow & & \end{array}$$

Det finns alltså två stationära punkter: $x = 0$ med $y = 0$ och $x = -6$ med $y = 18$.

För att bestämma de stationära punkternas karaktär, så behöver man beräkna andra derivatan (hessematrisen) och bestämma dess teckenkaraktär:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}; \qquad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}; \qquad H_f(-6,18) = \begin{pmatrix} -36 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $\det H_f(0,0) = -36 < 0$, så är $H_f(0,0)$ en indefinit kvadratisk form och därför är punkten $(x,y) = (0,0)$ en sadelpunkt.

Eftersom $\det H_f(-6,18) = 36 > 0$ och diagonalelementen är negativa, så är $H_f(0,0)$ en negativt definit kvadratisk form och därför är punkten $(x,y) = (-6,18)$ en lokal maximipunkt.

Uppgift 3 (genom att parametrisera def:mängden). Funktionen f är kontinuerlig och den är definierad på en sammanhängande kompakt mängd, vilket gör att värdemängden är ett slutet intervall från f:s minimivärde till f:s maximivärde.

Definitionsmängden är en ellips med halvaxlarna 2 i x-ledet och 1 i y-ledet. Ellipsen kan således parametriseras $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [-\pi, \pi]$. Man ska alltså optimera funktionen

$$h(t) = f(x(t), y(t)) = x(t) \cdot y(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t.$$

Sinusfunktionen (av dubbla vinkeln) svänger mellan -1 och 1 och båda dessa värden antas, ty $h(\pi/4) = h(-3\pi/4) = 1$ medan $h(3\pi/4) = h(-\pi/4) = -1$.

Värdemängden av den givna funktionen är alltså intervallet $[-1, 1]$.

Uppgift 3 (via Lagrange multiplikatorer, utan någon multiplikator). Funktionen f är kontinuerlig och den är definierad på en sammanhängande kompakt mängd, vilket gör att värdemängden är ett slutet intervall från f:s minimivärde till f:s maximivärde.

Vi ska undersöka funktionen $f(x,y) = xy$ under bivillkoret $g(x,y) := x^2 + 4y^2 - 4 = 0$. Enligt satsen om Lagrange multiplikatorer kan extremvärden finnas endast i de punkter där $\nabla f(x,y) = (y,x)$ och $\nabla g(x,y) = (2x, 8y)$ är linjärt beroende. Dessa hittas genom att lösa ekvationen

$$\det \begin{pmatrix} \nabla f(x,y) \\ \nabla g(x,y) \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 8y \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8y^2 - 2x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2y.$$

När detta sätts in i bivillkorets ekvation, så

$$(\pm 2y)^2 + 4y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 8y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2},$$

där alla kombinationer av $\pm$-tecknen hos x och y förekommer.

Således är $f(\sqrt{2}, \sqrt{1/2}) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{1/2}) = 1$ ett maximivärde, medan $f(-\sqrt{2}, \sqrt{1/2}) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{1/2}) = -1$ är ett minimivärde.

Den sökta värdemängden är alltså intervallet $[-1, 1]$.

Uppgift 3 (via Lagrange multiplikatorer). Funktionen f är kontinuerlig och den är definierad på en sammanhängande kompakt mängd, vilket gör att värdemängden är ett slutet intervall från f:s minimivärde till f:s maximivärde.

Vi ska undersöka funktionen $f(x,y) = xy$ under bivillkoret $g(x,y) := x^2 + 4y^2 - 4 = 0$. Enligt satsen om Lagrange multiplikatorer kan extremvärden finnas endast i stationära punkter av Lagrange funktion $L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda g(x,y)$ förutsatt att $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$. Eftersom

$\nabla g(x, y) = (2x, 8y)$ blir nollvektorn endast i origo som inte ingår i f:s definitionsmängd, så räcker det med att hitta L:s stationära punkter.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = x + 8\lambda y, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

När första ekvationen multipliceras med $4y$ och den andra ekvationen med x och man identifierar ekvationernas vänsterled, så

$$4y^2 + 8\lambda xy = x^2 + 8\lambda xy \quad \Leftrightarrow \quad 4y^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad \Big/ \text{insatt i 3:e ekvation} \Big/ \quad \Rightarrow \quad 8y^2 - 4 = 0.$$

Detta ger att $y = \pm\sqrt{1/2}$ och $x = \pm\sqrt{2}$, där alla kombinationer av $\pm$-tecknen hos x och y förekommer. Således är $f(\sqrt{2}, \sqrt{1/2}) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{1/2}) = 1$ ett maximivärde, medan $f(-\sqrt{2}, \sqrt{1/2}) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{1/2}) = -1$ är ett minimivärde.

Den sökta värdemängden är alltså intervallet $[-1, 1]$.

Uppgift 4. Ansatsen $f(x, t) = g(x + t^2, x^3 - t^2)$ ger följande samband enligt kedjeregeln:

$$f'_x = g'_u \cdot 1 + g'_v \cdot 3x^2 \qquad \text{samt} \qquad f'_t = g'_u \cdot 2t + g'_v \cdot (-2t),$$

där variablerna för funktionen g betecknats med u och v. Dessa derivator sätts in i PDE:n,

$$\begin{aligned} 2t(g'_u \cdot 1 + g'_v \cdot 3x^2) + 3x^2(g'_u \cdot 2t + g'_v \cdot (-2t)) &= 4t + 12x^2 t \quad \Leftrightarrow \\ 2tg'_u + 6x^2tg'_v + 6x^2tg'_u - 6x^2tg'_v &= 4t + 12x^2t \quad \Leftrightarrow \\ (2t + 6x^2t)g'_u &= 4t + 12x^2t \quad \Leftrightarrow \\ g'_u &= 2. \end{aligned}$$

Således $g(u, v) = \int g'_u \, du = 2u + h(v)$, där funktionen h ska bestämmas m.h.a. begynnelsevillkoret. Enligt ansatsen är $f(x, 0) = g(x + 0^2, x^3 - 0^2) = 2x + h(x^3)$. Begynnelsevillkoret lyder $f(x, 0) = 2x$, vilket innebär att $h(x^3) = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$, så funktionen h är konstant noll.

PDE:n löses av $f(x, t) = g(x + t^2, x^3 - t^2) = 2(x + t^2) = 2x + 2t^2$.

Uppgift 5. I båda deluppgifterna behövs parametriseringens derivata:

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t + 2\sin 2t \\ 2\cos t - 2\cos 2t \end{pmatrix}.$$

(a) Längden av kurvan beräknas m.h.a. kurvintegralen

$$\int_C 1 \, ds = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt.$$

Längden av vektorn $\mathbf{r}'(t)$ beräknas m.h.a. Pythagoras sats och trigonometriska formler:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}'(t)\|^2 &= (-2\sin t + 2\sin 2t)^2 + (2\cos t - 2\cos 2t)^2 \\ &= 4\sin^2 t - 8\sin t \sin 2t + 4\sin^2 2t + 4\cos^2 t - 8\cos t\cos 2t + 4\cos^2 2t \\ &= 4(\sin^2 t + \cos^2 t) + 4(\sin^2 2t + \cos^2 2t) - 8(\cos t\cos 2t + \sin t\sin 2t) \\ &= 4 + 4 - 8\cos(2t - t) = 8 - 8\cos t\,. \end{aligned}$$

Trigonometriska formler används igen i integralen

$$\int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{8}\sqrt{1-\cos t} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{16} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \left[4 \cdot \frac{-\cos(t/2)}{1/2}\right]_{t=0}^{2\pi} = 16.$$

Kardioidens längd är 16 l.e.

(b) Enligt Greens formel är

$$\begin{aligned}
\text{Arean} &= \iint_D 1 \, dx \, dy = \oint_{\partial D} -y \, dx = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-2\sin t + \sin 2t)}_{=-y} \underbrace{(-2\sin t + 2\sin 2t) \, dt}_{=dx} \\
&= \int_0^{2\pi} 4\sin^2 t - 6 \sin t \sin 2t + 2\sin^2 2t \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos 2t) - 3(\cos t - \cos 3t) + (1 - \cos 4t) \, dt \\
&= \left[(2t - \sin 2t) - (3\sin t - \sin 3t) + \left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\right]_{t=0}^{2\pi} = 6\pi.
\end{aligned}$$

Arean av det område som innesluts av kardioiden är 6π a.e.

Uppgift 6. När xy-variablerna skrivs om i polära koordinater (d.v.s. $x = R\cos t$, $y = R \sin t$, där $R > 0$, $t \in [0, 2\pi]$), så begränsas parametrarna R och t av de givna villkoren på följande sätt:

$$\begin{aligned}
&z = R^2\cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2; \\
&4 \le z \le 9 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \le R^2 \le 9 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \le R \le 3; \\
&x \le y \quad \Leftrightarrow \quad R\cos t \le R \sin t \quad \Leftrightarrow \quad \cos t \le \sin t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{5\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Observera att olikheten $x \le y$ enklast översätts till villkoret för vinkeln t m.h.a. en figur. Det går inte bra att dela båda leden i olikheten $\cos t \le \sin t$ med $\cos t$, eftersom $\cos t$ är negativt för vissa värden på t. Man har fått fram ytans parametrisering:

$$\mathbf{r}(R,t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ R^2 \end{pmatrix}, \quad 2 \le R \le 3, \quad \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{5\pi}{4}.$$

Den efterfrågade arean beräknas som ytintegralen

$$\text{Arean} = \iint_Y 1 \, dS = \int_2^3 \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| dt \, dR\,.$$

Integranden ska nu beräknas:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2R \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -2R^2\cos t \\ -2R^2 \sin t \\ R(\cos^2 t + \sin^2 t) \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} -2R\cos t \\ -2R\sin t \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| = R\sqrt{(-2R\cos t)^2 + (-2R\sin t)^2 + 1^2} = R\sqrt{1+4R^2}\,.$$

Nu är man redo för att integrera.

$$\text{Arean} = \int_2^3 \int_{\pi/4}^{5\pi/4} R\sqrt{1+4R^2}\,dt\,dR = \pi \int_2^3 R\sqrt{1+4R^2}\,dR = \left/ \begin{array}{c} u = 1+4R^2 \\ du = 8R\,dR \end{array} \right/$$

$$= \pi \int_{17}^{37} \sqrt{u}\,\frac{du}{8} = \frac{\pi}{8}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_{u=17}^{37} = \frac{\pi}{12}\left(37^{3/2} - 17^{3/2}\right) \text{ a.e.}$$

Uppgift 7. Första oktanten är enkelt sammanhängande.

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x+y} - e^{-z} - \left(\frac{1}{1+x+y} - e^{-z}\right) \\ \frac{1}{1+x+y} - \frac{1}{1+x+y} \\ \frac{-z}{(1+x+y)^2} - \left(\frac{-z}{(1+x+y)^2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De tillräckliga villkoren är uppfyllda och så är vektorfältet $\mathbf{F}$ konservativt och man kan hitta dess potentialfunktion Φ genom att integrera komponenter av fältet och derivera de uppkomna funktionerna flera gånger.

$$\Phi'_x(x,y,z) = F_1(x,y,z) = \frac{z}{1+x+y} + 2\cos(2x)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(x,y,z) = \int \frac{z}{1+x+y} + 2\cos(2x)\,dx = z\ln(1+x+y) + \sin(2x) + g(y,z);$$

$$\Rightarrow \quad \Phi'_y(x,y,z) = \frac{z}{1+x+y} + g'_y(y,z) \quad \text{och} \quad \Phi'_y(x,y,z) = F_2(x,y,z) = \frac{z}{1+x+y} + e^{-z}$$

$$\Rightarrow \quad g'_y(y,z) = e^{-z} \quad \Rightarrow \quad g(y,z) = \int e^{-z}\,dy = ye^{-z} + h(z)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(x,y,z) = z\ln(1+x+y) + \sin(2x) + ye^{-z} + h(z)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi'_z(x,y,z) = \ln(1+x+y) - ye^{-z} + h'(z)$$

$$\text{och} \quad \Phi'_z(x,y,z) = F_3(x,y,z) = \ln(1+x+y) - ye^{-z} \quad \Rightarrow \quad h'(z) = 0$$

$$\Rightarrow \quad h(z) = C \quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y,z) = z\ln(1+x+y) + \sin(2x) + ye^{-z} + C.$$

Värdet på kurvintegralen bestäms m.h.a. potentialfunktionen:

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \Phi(2\pi,2,1) - \Phi(\pi,1,2) = \ln(3+2\pi) + 2e^{-1} - 2\ln(2+\pi) - e^{-2} = \ln\left(\frac{3+2\pi}{(2+\pi)^2}\right) + \frac{2e-1}{e^2}.$$

Uppgift 8. Enligt divergenssatsen är $\oiint_{\partial K} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS = -\iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$. Lägg märke till att minustecknet lagts till eftersom normalerna i divergenssatsen pekar utåt (d.v.s. åt motsatt håll än i den integral som skulle beräknas).

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = z^2 - x^2 - y^2.$$

Således

$$\oiint_{\partial K} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_K x^2 + y^2 - z^2\,dV = \left/ \text{variabelbyte till sfäriska koordinater} \right/ = \cdots$$

Integrationsgränserna för sfäriska koordinater fås m.h.a. de givna olikheterna för K:

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le R \le 3,$$

$$x \ge 0 \text{ och } y \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi \text{ i standardintervallet, d.v.s. } 0 \le \varphi \le \pi.$$

Funktionaldeterminanten (Jacobideterminanten) för sfäriska koordinater är $R^2 \sin\varphi$. Integranden med utbytta variabler blir

$$x^2+y^2-z^2 = R^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi - R^2\cos^2\varphi = R^2(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi) = -R^2\cos 2\varphi\,.$$

Därför

$$\begin{aligned}
\iiint_K x^2+y^2-z^2\,dV &= \int_0^3\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}(-R^2\cos 2\varphi)R^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dR \\
&= \int_0^3 R^4\,dR\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\pi}-\sin\varphi\cos 2\varphi\,d\varphi \\
&= \left[\frac{R^5}{5}\right]_{R=0}^{3}\big[\theta\big]_{\theta=0}^{\pi/2}\int_0^{\pi}\frac{-1}{2}\big(\sin(-\varphi)+\sin 3\varphi\big)\,d\varphi \\
&= \frac{3^5}{5}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\left[\cos(-\varphi)-\frac{\cos 3\varphi}{3}\right]_{\varphi=0}^{\pi} \\
&= \frac{-3^5\pi}{20}\cdot\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{-3^5\pi}{20}\cdot\frac{-4}{3} = \frac{3^4\pi}{5} = \frac{81\pi}{5}\,.
\end{aligned}$$

Uppgift 9. Observera att båda randerna ∂S och ∂T bildar en cirkel i xy-planet, med mittpunkten i origo och radien 2. Enligt högerhandsregeln är ∂S orienterad moturs (sett uppifrån), men ∂T är orienterad medurs (sett uppifrån). Med andra ord, ∂S är samma kurva som ∂T fast med motsatt orientering.

(a)

$$\begin{aligned}
\iint_S(\operatorname{curl}\mathbf{F})\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS &= \oint_{\partial S}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} && \big/\text{Stokes sats}\big/ \\
&= -\oint_{\partial T}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} && \big/\text{motsatt orientering}\big/ \\
&= -\oint_{\partial T}\mathbf{G}\bullet d\mathbf{r} && \big/\mathbf{F}(x,y,0)=\mathbf{G}(x,y,0)\big/ \\
&= -\iint_T(\operatorname{curl}\mathbf{G})\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS && \big/\text{Stokes sats}\big/
\end{aligned}$$

Man har alltså bevisat att $\iint_S(\operatorname{curl}\mathbf{F})\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS = -\iint_T(\operatorname{curl}\mathbf{G})\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS$.

(b) Låt K vara det övre halvklotet $x^2+y^2+z^2\le 4$, $z\ge 0$. Låt L vara det undre halvklotet $x^2+y^2+z^2\le 4$, $z\le 0$. Låt D vara cirkelskivan i xy-planet, med mittpunkten i origo och radien 2, d.v.s., $x^2+y^2\le 4$, $z=0$.

Då är $\partial K = S\cup D$, där normalvektorn på cirkelskivan D pekar nedåt, medan $\partial L = T\cup D$, där normalvektorn på cirkelskivan D pekar uppåt.

$$\begin{aligned}
\iint_S\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS &= \oiint_{\partial K}\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS - \iint_D\mathbf{F}\bullet\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}dS && \big/\partial K = S\cup D\big/ \\
&= \iiint_K\operatorname{div}\mathbf{F}\,dV + \iint_D F_3\,dS && \big/\text{Gauß sats}\big/ \\
&= 0 + \iint_D F_3\,dS && \big/\operatorname{div}\mathbf{F}=0\big/
\end{aligned}$$

Analogt visar man att

$$\begin{aligned}
\iint_T \mathbf{G} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS &= \oiint_{\partial L} \mathbf{G} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS - \iint_D \mathbf{G} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dS && \Big/ \partial L = T \cup D \Big/ \\
&= \iiint_L \operatorname{div} \mathbf{G}\, dV - \iint_D G_3\, dS && \Big/ \text{Gauß sats} \Big/ \\
&= 0 - \iint_D G_3\, dS && \Big/ \operatorname{div} \mathbf{G} = 0 \Big/
\end{aligned}$$

Eftersom D ligger i xy-planet, så gäller det att $F_3 = G_3$ i skivan D (på grund av förutsättningen $\mathbf{F}(x, y, 0) = \mathbf{G}(x, y, 0)$). Man har alltså visat att

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_D F_3\, dS = \iint_D G_3\, dS = -\iint_T \mathbf{G} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS\,.$$

Anmärkning till (b):
Det går bra att använda sig av vektorpotentialer och Stokes sats i stället för Gauß sats. Eftersom $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ i hela rummet, så finns det en vektorpotential $\boldsymbol{\Phi}$ sådan att $\operatorname{curl} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{F}$. Av likadan anledning finns det en vektorpotential $\boldsymbol{\Psi}$ så att $\operatorname{curl} \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{G}$. Lägg märke till att det mycket väl är möjligt att $\boldsymbol{\Phi}(x, y, 0) \neq \boldsymbol{\Psi}(x, y, 0)$ någonstans i xy-planet.

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS &= \iint_S (\operatorname{curl} \boldsymbol{\Phi}) \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS && \Big/ \boldsymbol{\Phi} \text{ är vektorpotential till } \mathbf{F} \Big/ \\
&= \oint_{\partial S} \boldsymbol{\Phi} \bullet d\mathbf{r} && \Big/ \text{Stokes sats} \Big/ \\
&= \iint_D (\operatorname{curl} \boldsymbol{\Phi}) \bullet \hat{\mathbf{N}}_{\uparrow}\, dS && \Big/ \text{Stokes sats och } \partial D = \partial S \Big/ \\
&= \iint_D \mathbf{F} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dS = \iint_D F_3\, dS && \Big/ \boldsymbol{\Phi} \text{ är vektorpotential till } \mathbf{F} \Big/
\end{aligned}$$

På liknande sätt blir

$$\begin{aligned}
\iint_T \mathbf{G} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS &= \iint_T (\operatorname{curl} \boldsymbol{\Psi}) \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS && \Big/ \boldsymbol{\Psi} \text{ är vektorpotential till } \mathbf{G} \Big/ \\
&= \oint_{\partial T} \boldsymbol{\Psi} \bullet d\mathbf{r} && \Big/ \text{Stokes sats} \Big/ \\
&= \iint_D (\operatorname{curl} \boldsymbol{\Psi}) \bullet \hat{\mathbf{N}}_{\downarrow}\, dS && \Big/ \text{Stokes sats och } \partial D = \partial T \Big/ \\
&= \iint_D \mathbf{G} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dS = -\iint_D G_3\, dS && \Big/ \boldsymbol{\Psi} \text{ är vektorpotential till } \mathbf{G} \Big/
\end{aligned}$$