Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Lösningsförslag till tentamen
2018-08-31, 8:30–12:30

# MVE041: Flervariabelmatematik

**Uppgift 1.** (a) När man närmar sig till origo längs raka linjer $y = kx$, där $k \in \mathbb{R}$, $x \to 0$, så fås

$$\left.\frac{2x^2 + x^2y^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}\right|_{y=kx} = \frac{2\cancel{x^2} + \cancel{x^2}(kx)^2 + 2(k\cancel{x})^2}{1\cancel{x^2} + (k\cancel{x})^2} = \frac{2 + 2k^2 + k^2x^2}{1 + k^2} \to \frac{2 + 2k^2}{1 + k^2} = 2 \quad \text{då } x \to 0.$$

Om gränsvärdet existerar, så är dess värde lika med 2. Låt oss då uppskatta

$$\left|\frac{2x^2 + x^2y^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} - 2\right| = \left|\frac{2x^2 + x^2y^2 + 2y^2 - 2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\right| = \left|x^2 \cdot \underbrace{\frac{y^2}{x^2 + y^2}}_{\leq 1}\right| \leq x^2,$$

vilket konvergerar mot 0 då $(x, y) \to (0, 0)$. Således existerar det givna gränsvärdet.

(b) När man närmar sig till origo längs raka linjer $y = kx$, där $k \in \mathbb{R}$, $x \to 0$, så får man

$$\left.\frac{x^4 + y^2}{x^2 + y^4}\right|_{y=kx} = \frac{x^4 + (kx)^2}{x^2 + (kx)^4} = \frac{\cancel{x^2}(x^2 + k^2)}{\cancel{x^2}(1 + k^4x^2)} = \frac{x^2 + k^2}{1 + k^4x^2} \to \frac{0 + k^2}{1 + 0 \cdot k^4} = k^2 \quad \text{då } x \to 0.$$

Det innebär att olika linjer leder till olika gränsvärden och så existerar det givna gränsvärdet inte.

**Uppgift 2.** (a) En normalvektor till nivåkurvan (således till tangentlinjen till nivåkurvan) fås som $\nabla f(1, 4)$. Man börjar med att beräkna gradienten:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{12y}{16+xy} \\ 1 - \frac{12x}{16+xy} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(1, 4) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{12\cdot 4}{16+1\cdot 4} \\ 1 - \frac{12\cdot 1}{16+1\cdot 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{-2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tangentlinjens ekvation är alltså $1x - 1y + C = 0$, där värdet på $C \in \mathbb{R}$ bestäms genom att sätta in tangeringspunktens koordinater i linjens ekvation, d.v.s. $1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 + C = 0$ ger $C = 3$.

Svar: Den sökta tangentlinjen har ekvationen $x - y + 3 = 0$.

(b) De stationära punkterna uppfyller vektorekvationen $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, så man behöver lösa följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} 2 - \dfrac{12y}{16 + xy} = 0 \\ 1 - \dfrac{12x}{16 + xy} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot (16 + xy) = 12y \\ 1 \cdot (16 + xy) = 12x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x = 6y \\ 16 + xy = 12x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 16 + x \cdot (2x) = 12x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \quad \text{och} \quad y = 4, \\ \quad \text{eller} \\ x = 4 \quad \text{och} \quad y = 8. \end{cases}$$

Det finns alltså två stationära punkter, nämligen $(2, 4)$ och $(4, 8)$. För att avgöra deras karaktär, beräknas hessmatrisen och dess teckenkaraktär i dessa punkter.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2 - \frac{12y}{16+xy}\right) = \frac{12y^2}{(16+xy)^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(2 - \frac{12y}{16+xy}\right) = \frac{-12\cdot 16}{(16+xy)^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \frac{12x}{16+xy}\right) = \frac{-12\cdot 16}{(16+xy)^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(1 - \frac{12x}{16+xy}\right) = \frac{12x^2}{(16+xy)^2}.$$

I punkten $(2, 4)$ får man

$$H_f(2,4) = \begin{pmatrix} \frac{12\cdot 16}{24^2} & \frac{-12\cdot 16}{24^2} \\ \frac{-12\cdot 16}{24^2} & \frac{12\cdot 4}{24^2} \end{pmatrix} = \frac{12\cdot 4}{24^2}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \det H_f(2,4) = \left(\frac{1}{12}\right)^2 \big(4\cdot 1 - (-4)(-4)\big) = \frac{1}{12^2}\cdot(-12) = \frac{-1}{12} < 0,$$

vilket innebär att $H_f(2, 4)$ är en indefinit kvadratisk form och så är punkten $(2, 4)$ en sadelpunkt.

I punkten $(4, 8)$ får man

$$H_f(4,8) = \begin{pmatrix} \frac{12\cdot 64}{48^2} & \frac{-12\cdot 16}{48^2} \\ \frac{-12\cdot 16}{48^2} & \frac{12\cdot 16}{48^2} \end{pmatrix} = \frac{12\cdot 16}{48^2}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \det H_f(4,8) = \left(\frac{1}{12}\right)^2 \big(4\cdot 1 - (-1)(-1)\big) = \frac{1}{12^2}\cdot 3 = \frac{1}{48} > 0$$

medan elementet i första raden och första kolumnen är positivt, vilket innebär att $H_f(4, 8)$ är en positivt definit kvadratisk form och så är punkten $(4, 8)$ en lokal minimipunkt.

**Uppgift 3.** Definitionsmängden är en sammanhängande kompakt mängd i $\mathbb{R}^3$ och funktionen $f$ är kontinuerligt, vilket innebär att $f$ antar sina extremvärden på $D_f$ och värdemängden är (det slutna) intervallet från minimivärdet till maximivärdet. Extremvärdena finnes m.h.a. Lagrange-multiplikatorer.
Bivillkoret beskrivs av ekvationen $g(x, y, z) = 0$, där $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 27$. Observera att $\nabla g = \mathbf{0}$ endast i punkten $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ som inte uppfyller bivillkoret och så kan alla extrempunkter av $f$ bestämmas som stationära punkter av Lagrangefunktionen $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 1 + 2\lambda x, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 1 + 2\lambda y,$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial g}{\partial z} = -1 + 2\lambda(z-1), \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g = x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 27,$$

Uppenbarligen kan $\lambda = 0$ inte vara någon lösning till ekvationssystemet $\nabla L = \mathbf{0}$ och så går det bra att uttrycka $x$, $y$, och $z$ i termer av $\lambda$, nämligen

$$x = \frac{-1}{2\lambda}, \quad y = \frac{-1}{2\lambda} \quad \text{och} \quad z - 1 = \frac{1}{2\lambda},$$

och sätta in dessa i ekvationen $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ (alltså i bivillkorets ekvation). På så sätt får man att

$$\left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 27 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{4\lambda^2} = 27 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2 = \frac{3}{4\cdot 27} = \frac{1}{36} \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = \pm\frac{1}{6}.$$

Det finns alltså två lösningar till ekvationssystemet $\nabla L = \mathbf{0}$:

$$\lambda = 1/6: \qquad x = y = \frac{-1}{2/6} = -3, \quad z - 1 = \frac{1}{2/6} = 3 \quad \Rightarrow \quad z = 4. \qquad f(-3,-3,4) = -10.$$

$$\lambda = -1/6: \qquad x = y = \frac{-1}{-2/6} = 3, \quad z - 1 = \frac{1}{-2/6} = -3 \quad \Rightarrow \quad z = -2. \qquad f(3,3,-2) = 8.$$

Värdemängden är således intervallet $[-10, 8]$.

**Uppgift 4.** Enligt kedjeregeln är

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{z} \cdot \left( D_1 f \cdot \frac{\partial(5e^{x^2-y^2})}{\partial x} + D_2 f \cdot \frac{\partial(3e^{2y^2-2x^2})}{\partial x} \right) = \sqrt{z} \cdot \left( 10xe^{x^2-y^2} D_1 f - 12xe^{2y^2-2x^2} D_2 f \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{z} \cdot \left( D_1 f \cdot \frac{\partial(5e^{x^2-y^2})}{\partial y} + D_2 f \cdot \frac{\partial(3e^{2y^2-2x^2})}{\partial y} \right) = \sqrt{z} \cdot \left( -10ye^{x^2-y^2} D_1 f + 12ye^{2y^2-2x^2} D_2 f \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot f(5e^{x^2-y^2}, 3e^{2y^2-2x^2}).$$

När dessa sätts in i vänsterledet av den givna PDE:n, så får man att

$$VL = y\sqrt{z} \cdot \left( \cancel{10xe^{x^2-y^2} D_1 f} - \cancel{12xe^{2y^2-2x^2} D_2 f} \right) + x\sqrt{z} \cdot \left( \cancel{-10ye^{x^2-y^2} D_1 f} + \cancel{12ye^{2y^2-2x^2} D_2 f} \right) + \frac{2z}{2\sqrt{z}} f = \sqrt{z}\, f = u = HL$$

**Uppgift 5.** När man utgår från cylindriska koordinater ($x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = h$, där $R \geq 0$, $t \in [-\pi, \pi]$, $h \in \mathbb{R}$) och eliminerar variablerna m.h.a. de givna ekvationerna, så fås att

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad R^2\cos^2 t + R^2 \sin^2 t = 4 \quad \Rightarrow \quad R^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad R = 2;$$
$$z = \frac{1}{2}y^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}R^2 \sin^2 t \quad \Rightarrow \quad h = 2\sin^2 t = 1 - \cos 2t.$$

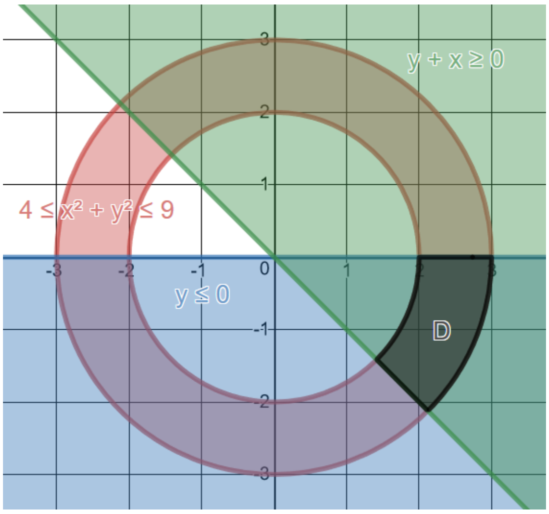
Kurvan $C$ kan alltså parametriseras

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 1 - \cos 2t \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi, \pi], \quad \text{så} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{4 + 4\sin^2 2t}\,.$$

Nu är vi redo för att beräkna kurvintegralen.

$$\int_C \sqrt{4 + (xy)^2}\, ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4 + (4\cos t \sin t)^2} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4 + (2\sin 2t)^2} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} (4 + 4\sin^2 2t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} (6 - 2\cos 4t)\, dt = \left[ 6t - \frac{\sin 4t}{2} \right]_{t=-\pi}^{\pi} = 12\pi.$$

**Uppgift 6.** Både integranden och integrationsområdet förenklas med hjälp av variabelbytet till polära koordinater (d.v.s., $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$, där $r \geq 0$ och $\theta \in [-\pi, \pi]$). De givna olikheterna utnyttjas för att få fram integrationsgränserna.




$$\begin{aligned} 4 \leq x^2+y^2 \leq 9 \quad &\Leftrightarrow \quad 4 \leq r^2 \leq 9 \\ &\Leftrightarrow \quad 2 \leq r \leq 3. \\ x+y \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad r\cos\theta + r\sin\theta \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos\theta \geq -\sin\theta \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \\ y \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad r\sin\theta \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\pi \leq \theta \leq 0 \end{aligned}$$

Sammanfattningsvis är $r \in [2,3]$ och $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$. Nu ska vi undersöka integranden:

$$\frac{2\cdot(y/x)}{5+x^2+y^2} = \frac{2\cdot(r\sin\theta)/(r\cos\theta)}{5+r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{5+r^2}.$$

Beloppet av Jacobianen för polära koordinater är $r$, så variabelbytet ger

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{2\cdot(y/x)}{5+x^2+y^2}\,dA &= \int_2^3 \int_{-\pi/4}^0 \frac{2\tan\theta}{5+r^2}\, r\,d\theta\,dr = \int_2^3 \frac{2r}{5+r^2}\,dr \int_{-\pi/4}^0 \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta \\ &= \Big[\ln(5+r^2)\Big]_{r=2}^3 \Big[-\ln|\cos\theta|\Big]_{\theta=-\pi/4}^0 = \ln\Big(\frac{14}{9}\Big)\ln\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big). \end{aligned}$$

**Uppgift 7.** (a) Enhetscirkeln parametriseras:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix}-\sin t \\ \cos t\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dx = -\sin t\,dt \\ dy = \cos t\,dt \end{cases}$$

Den sökta kurvintegralen blir

$$\begin{aligned} \int_C y^2\,dx + 2\,dy &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t(-\sin t) + 2\cos t\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1-\cos^2 t)(-\sin t) + 2\cos t\,dt = \Big[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} + 2\sin t\Big]_{t=0}^{2\pi} = 0\,. \end{aligned}$$

*Anmärkning:* Greens sats + symmetrin av integrationsområdet och av integranden (uddahet) är ett alternativt sätt för att få svaret: $\int_C y^2\,dx + 2\,dy = \int_D (-2y)\,dA = 0$, där $D$ är enhetscirkelskivan.

(b) Eftersom $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial y^2}{\partial y} = 2y$ inte är lika med $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial 2}{\partial x} = 0$, är vektorfältet $\mathbf{F}$ inte konservativt.

(c) Svaret på (a) kan **inte** utnyttjas för att besvara (b).

Ett vektorfält är konservativt i enhetscirkelskivan om och endast om $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0$ för **varje enkel sluten kurva** $C$ som ligger **inuti enhetscirkelskivan.** Vi har fått nollan för en enda kurva som dessutom ligger på randen av cirkelskivan. Det räcker inte för att få att fältet är konservativt.

Inte heller kan man dra slutsats att fältet inte är konservativt eftersom man då skulle behöva att kurvintegralens värde är nollskilt. (P.g.a. kontinuiteten skulle ett nollskilt värde på kurvintegralen över enhetscirkeln innebära att värdet på kurvintegralen över en lite mindre cirkel som ligger inuti enhetscirkelskivan också är nollskilt.)

**Uppgift 8.** (a) Eftersom divergensen är en linjär operator, så gäller att

$$\iiint_K \operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G})\,dV = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}+\operatorname{div}\mathbf{G}\,dV = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = -\iiint_K \operatorname{div}\mathbf{G}\,dV.$$

Enligt divergenssatsen är

$$\oiint_{\partial K} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = -\iiint_K \operatorname{div}\mathbf{G}\,dV = -\oiint_{\partial K} \mathbf{G}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS.$$

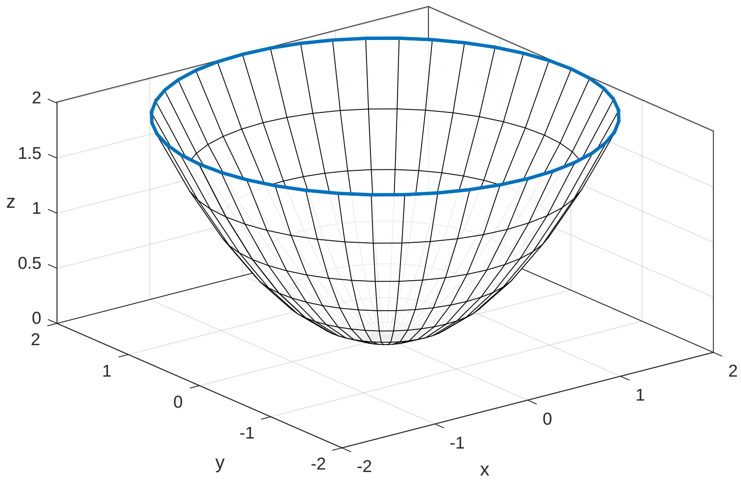
(b) Genom att kasta om deriveringsordningen kan man inse att $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{\Phi}) = 0$ för varje vektorfält $\mathbf{\Phi}$ som är två gånger kontinuerligt differentierbart. Således $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ i hela rummet. Således

$$\iiint_K \operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G})\,dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{G}\,dV = 0.$$

Enligt divergenssatsen är

$$\oiint_{\partial K} \mathbf{G}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{G}\,dV = 0.$$

**Uppgift 9.** Kurvan $C$ är en cirkel i planet $z = 2$ med radien 2 och mittpunkten $(0, 0, 2)$.




Enligt Stokes sats är

$$\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS,$$

där $S$ är en orienterbar yta vars orienterade rand sammanfaller med $C$. I denna uppgift blir cirkelskivan i planet $z = 2$ nog den enklaste ytan som kan användas. Då blir $\hat{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x + y\sin(yz) \\ xe^{zx} - (y + \frac{1}{1+x+z}) \\ 2xy - (2xy-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y\sin(yz) \\ xe^{zx} - y - \frac{1}{1+x+z} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{curl}\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}} = 1.$$

Således

$$\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \iint_S 1\,dS = \text{Arean av cirkelskivan med radien } 2 = 4\pi\,.$$