Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Lösningsförslag till tentamen
2018-10-13, 8:30–12:30

MVE041: Flervariabelmatematik

Uppgift 1. (a) När man närmar sig till punkten $(2, 1)$ längs den vågräta linjen $y = 1$, så

$$\left.\frac{x+y-2}{x^2-y^2-4x+2y+3}\right|_{y=1} = \frac{x-1}{x^2-4x+4} = \frac{x-1}{(x-2)^2} \to \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{då } x \to 2.$$

När man närmar sig till punkten $(2, 1)$ längs den lodräta linjen $x = 2$, så

$$\left.\frac{x+y-2}{x^2-y^2-4x+2y+3}\right|_{x=2} = \frac{y}{-y^2+2y-1} = \frac{y}{-(y-1)^2} \to \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{då } y \to 1.$$

Det innebär att olika linjer leder till olika gränsvärden och så existerar det givna gränsvärdet inte.

(b) När man närmar sig till origo längs raka linjer $y = kx$, där $k \in \mathbb{R}$, så fås

$$\begin{aligned}\left.\frac{6y^2+3y^4+2x^2+x^4}{x^2+3y^2}\right|_{y=kx} &= \frac{6k^2\cancel{x^2}+3k^4\cancelto{x^2}{x^4}+2\cancel{x^2}+\cancelto{x^2}{x^4}}{\cancelto{1}{x^2}+3k^2\cancel{x^2}} \\ &= \frac{2+6k^2+(1+3k^4)x^2}{1+3k^2} \to \frac{2+6k^2}{1+3k^2} = 2 \quad \text{då } x \to 0.\end{aligned}$$

Om gränsvärdet existerar, så är dess värde lika med 2. Låt oss då uppskatta

$$\begin{aligned}\left|\frac{6y^2+3y^4+2x^2+x^4}{x^2+3y^2} - 2\right| = \left|\frac{x^4+3y^4}{x^2+3y^2}\right| &\le \left|\frac{x^4}{x^2+3y^2}\right| + \left|\frac{3y^4}{x^2+3y^2}\right| \\ &= \left|x^2 \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+3y^2}}_{\le 1}\right| + \left|y^2 \cdot \underbrace{\frac{3y^2}{x^2+3y^2}}_{\le 1}\right| \le x^2 + y^2,\end{aligned}$$

vilket konvergerar mot 0 då $(x, y) \to (0, 0)$. Således existerar det givna gränsvärdet.

Uppgift 2. (a) Linjäriseringen ges av $L(x, y, z) = f(1, 2, \frac{1}{2}) + \nabla f(1, 2, \frac{1}{2}) \bullet (x-1, y-2, z-\frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned}f(1, 2, \tfrac{1}{2}) &= 1^3 + 1 \cdot 2 - e^{1-2\cdot 0,5} = 2, \\ \nabla f(x, y, z) &= (3x^2 + y, x + ze^{1-yz}, ye^{1-yz}), \\ \nabla f(1, 2, \tfrac{1}{2}) &= (3 \cdot 1^2 + 2, 1 + \tfrac{1}{2}e^{1-2\cdot 0,5}, 2e^{1-2\cdot 0,5}) = (5, \tfrac{3}{2}, 2).\end{aligned}$$

Således

$$L(x, y, z) = 2 + (5, \tfrac{3}{2}, 2) \bullet (x-1, y-2, z-\tfrac{1}{2}) = 5x + \tfrac{3}{2}y + 2z - 7.$$

(b) Riktningsvektorn behöver normaliseras. Då $\|(2, -1, -2)\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$, låt $\mathbf{v} = \frac{1}{3}(2, -1, -2)$. Riktningsderivatan kan beräknas m.h.a. skalärprodukten.

$$\begin{aligned}\nabla f(2, 1, 1) &= (3 \cdot 2^2 + 1, 2 + 1e^{1-1\cdot 1}, 1e^{1-1\cdot 1}) = (13, 3, 1), \quad \text{så} \\ D_{\mathbf{v}} f(2, 1, 1) &= \nabla f(2, 1, 1) \bullet \mathbf{v} = (13, 3, 1) \bullet (\tfrac{2}{3}, \tfrac{-1}{3}, \tfrac{-2}{3}) = \tfrac{26}{3} - \tfrac{3}{3} - \tfrac{2}{3} = \tfrac{21}{3} = 7.\end{aligned}$$

Uppgift 3. Definitionsmängden är en sammanhängande kompakt mängd i $\mathbb{R}^3$ och funktionen f är kontinuerligt, vilket innebär att f antar sina extremvärden på D_f. Extremvärdena inuti området (sned ellipsskiva) bestäms genom att hitta stationära punkter av f. Extremvärdena på randen (sned ellips) finnes m.h.a. Lagrange-multiplikatorer.

Stationära punkter inuti: $\nabla f = (2x, 2y)$ blir nollvektorn då $(x, y) = (0, 0)$. En kandidat för ett extremvärde är alltså $f(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$.

Lagrange multiplikatorer på randen: Bivillkoret beskrivs av ekvationen $g(x, y) = 0$, där $g(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 16$. För att bestämma var vektorerna $\nabla f = (2x, 2y)$ och $\nabla g = (6x + 2y, 2x + 6y)$ är linjärt beroende, så räcker det att lösa ekvationen $\det\binom{\nabla f}{\nabla g} = 0$:

$$\det\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 6x + 2y & 2x + 6y \end{pmatrix} = 4x^2 + 12xy - (12xy + 4y^2) = 4x^2 - 4y^2 = 4(x + y)(x - y).$$

Fall 1: $x = y$ i bivillkoret ger $3x^2 + 2xx + 3x^2 - 16 = 8x^2 - 16 = 0$, vilket löses av $x = y = \pm\sqrt{2}$. Så får man två kandidater: $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4$ och $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4$.

Fall 2: $x = -y$ i bivillkoret ger $3x^2 - 2xx + 3x^2 - 16 = 4x^2 - 16 = 0$, vilket löses av $x = -y = \pm 2$. Så får man två kandidater: $f(2, -2) = 8$ och $f(-2, 2) = 8$.

Svar: Minimumet är $f(0, 0) = 0$ och maximumet är $f(2, -2) = f(-2, 2) = 8$.

Uppgift 4. Man ska beräkna partiella derivator av u m.h.a. kedjeregeln:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yzD_1 f + azD_2 f, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = xzD_1 f + bzD_2 f \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = f + 2zD_2 f\,.$$

När dessa sätts in i PDE:n, så får man

$$\begin{aligned} VL &= x(yzD_1 f + azD_2 f) - y(xzD_1 f + bzD_2 f) - (6x + 2y)(f + 2zD_2 f) \\ &= (-6x - 2y)f + (axz - byz - 12xz - 4yz)D_2 f \\ HL &= \frac{by - ax}{2z} \cdot zf = \Big(-\frac{a}{2}x + \frac{b}{2}y\Big)f\,. \end{aligned}$$

Uppenbarligen är $VL = HL$ (oavsett f) då $a = 12$ och $b = -4$.

Uppgift 5. När man utgår från det föreslagna variabelbytet $x = r\cos^4\theta$ och $y = r\sin^4\theta$, så olikheten $\sqrt{x} + \sqrt{y} \le 1$ ger $\sqrt{r}\cos^2\theta + \sqrt{r}\sin^2\theta = \sqrt{r} \le 1$. Samtidigt ska det gälla att $r\cos^4\theta \ge 0$ och $r\sin^4\theta \ge 0$. Således $r \in [0, 1]$. Man har en bijektiv avbildning mellan (x, y) och (r, θ) då $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ty $r = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ och $\theta = \arcsin(y^{1/4}/(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{2/4})$. Funktionaldeterminanten blir

$$\begin{aligned} \det J = \det\begin{pmatrix} \cos^4\theta & -4r\cos^3\theta\sin\theta \\ \sin^4\theta & 4r\sin^3\theta\cos\theta \end{pmatrix} &= 4r\sin^3\theta\cos^5\theta + 4r\sin^5\theta\cos^3\theta \\ &= 4r\sin^3\theta\cos^3\theta = 4r(\sin^3\theta - \sin^5\theta)\cos\theta\,. \end{aligned}$$

Variabelbytet i själva integranden ger

$$\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{\sqrt{r}\cos^2\theta + \sqrt{r}\sin^2\theta} = \sqrt{\sqrt{r}} = r^{1/4}.$$

Nu är man redo för att beräkna den givna integralen.

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\,dA &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r^{1/4} \cdot 4r(\sin^3\theta - \sin^5\theta)\cos\theta\,d\theta\,dr \\ &= 4\Big[\frac{r^{9/4}}{9/4}\Big]_{r=0}^1 \Big[\frac{\sin^4\theta}{4} - \frac{\sin^6\theta}{6}\Big]_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{16}{9} \cdot \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\Big) = \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{12} = \frac{4}{27}\,. \end{aligned}$$

Uppgift 6. Integrationsområdet ligger mellan två sfärer, så man kan förvänta sig att sfäriska koordinater blir lämpliga. Sätt alltså

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\sin\varphi & r &\geq 0 & & \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi & -\pi &\leq \theta \leq \pi & \det J &= r^2\sin\varphi \\ z &= r\cos\varphi & 0 &\leq \varphi \leq \pi & & \end{aligned}$$

där intervallen för variablerna r, θ och φ ska begränsas m.h.a. olikheterna som beskriver kroppen.

$$\begin{aligned} &1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq r^2 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad r \in [1,2], \\ &z \geq \sqrt{x^2+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad r\cos\varphi \geq r\sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \cos\varphi \geq \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi \in [0, \tfrac{\pi}{4}], \\ &x \geq y \quad \Leftrightarrow \quad r\cos\theta\sin\varphi \geq r\sin\theta\sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta \geq \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \theta \in [-\tfrac{3\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}]. \end{aligned}$$

Integranden $1/(x^2+y^2+z^2)$ blir $1/r^2$ vid variabelbytet. Således

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{dV}{x^2+y^2+z^2} &= \int_1^2 \left(\int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_0^{\pi/4} \frac{r^2\sin\varphi}{r^2}\, d\varphi \right) d\theta \right) dr = \int_1^2 dr \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin\varphi\, d\varphi \\ &= \big[r\big]_{r=1}^2 \big[\theta\big]_{\theta=-3\pi/4}^{\pi/4} \big[-\cos\varphi\big]_{\varphi=0}^{\pi/4} = 1 \cdot \pi \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \frac{(2-\sqrt{2})\pi}{2}. \end{aligned}$$

Uppgift 7. (a) Man kan hitta en potentialfunktion Φ (sådan att $\nabla\Phi = \mathbf{F}$) genom att integrera komponenterna av vektorfältet och derivera de uppkomna funktionerna flera gånger.

$$\begin{aligned} &\Phi'_x(x,y,z) = F_1(x,y,z) = ye^{xy} + z \\ &\quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y,z) = \int ye^{xy} + z\, dx = e^{xy} + xz + g(y,z); \\ &\quad \Rightarrow \quad \Phi'_y(x,y,z) = xe^{xy} + g'_y(y,z) \quad \text{och} \quad \Phi'_y(x,y,z) = F_2(x,y,z) = xe^{xy} + z \\ &\quad \Rightarrow \quad g'(y,z) = z \quad \Rightarrow \quad g(y,z) = \int z\, dy = yz + h(z) \\ &\quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y,z) = e^{xy} + xz + yz + h(z) \\ &\quad \Rightarrow \quad \Phi'_z(x,y,z) = x + y + h'(z) \quad \text{och} \quad \Phi'_z(x,y,z) = F_3(x,y,z) = \frac{2z}{1+z^2} + x + y \\ &\quad \Rightarrow \quad h'(z) = \frac{2z}{1+z^2} \quad \Rightarrow \quad h(z) = \int \frac{2z}{1+z^2}\, dz = \ln(1+z^2) + C \\ &\quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y,z) = e^{xy} + xz + yz + \ln(1+z^2) + C\,. \end{aligned}$$

Den sökta potentialfunktionen är $\Phi(x,y,z) = e^{xy} + xz + yz + \ln(1+z^2) + C$, där $C \in \mathbb{R}$ är en godtycklig konstant.

(b) Eftersom fältet $\mathbf{F}$ har en potentialfunktion, så kan den givna kurvintegralen beräknas som skillnaden mellan funktionsvärdena av potentialen i kurvans ändpunkter. Kurvans startpunkt är $\mathbf{r}(0) = (0,1,-1)$ och dess slutpunkt är $\mathbf{r}(1) = (2,0,1)$.

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(x,y,z) \bullet d\mathbf{r} &= \Phi(\mathbf{r}(1)) - \Phi(\mathbf{r}(0)) = \Phi(2,0,1) - \Phi(0,1,-1) \\ &= e^{2\cdot 0} + 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + \ln(1+1^2) - \left(e^{0\cdot 1} + 0\cdot(-1) + 1\cdot(-1) + \ln(1+(-1)^2)\right) \\ &= 1 + 2 + 0 + \ln 2 - (1 + 0 - 1 + \ln 2) = 3\,. \end{aligned}$$

Uppgift 8. (a) Enligt definitionen av divergensen och produktregeln är

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(fg) + \frac{\partial}{\partial y}0 + \frac{\partial}{\partial z}0 = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot g + f\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\,.$$

Divergenssatsen ger

$$\iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \oiint_{\partial K}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S},$$

där

$$VL = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_K\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot g + f\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\right)dV \quad \text{och}$$

$$HL = \oiint_{\partial K}\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS = \oiint_{\partial K}\begin{pmatrix} fg\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} N_x\\ N_y\\ N_y\end{pmatrix}dS = \oiint_{\partial K} fg\,N_x\,dS.$$

Det kvarstår att flytta över $\iiint_K f'_x g\,dV$ från VL till HL, vilket ger den efterfrågade likheten

$$\iiint_K fg'_x\,dV = \oiint_{\partial K} fgN_x\,dS - \iiint_K f'_x g\,dV.$$

(b) Vektorfältet $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0\\ fg\\ 0\end{pmatrix}$ i divergenssatsen ger $\iiint_K fg'_y\,dV = \oiint_{\partial K} fgN_y\,dS - \iiint_K f'_y g\,dV$, medan vektorfältet $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ fg\end{pmatrix}$ i divergenssatsen ger $\iiint_K fg'_z\,dV = \oiint_{\partial K} fgN_z\,dS - \iiint_K f'_z g\,dV$.

Uppgift 9. Man kan dra fördel av Stokes sats ty

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} D_x\\ D_y\\ D_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -x-y+z\\ x+y-z\\ x-y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-(-1)\\ 1-1\\ 1-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 2\end{pmatrix}.$$

Den del av hyperboliska paraboloiden $z = x^2 - y^2$ som ligger inuti cylindern $x^2 + y^2 \leq 1$ blir en lämplig yta för Stokes sats. Ytan ska betecknas Y. Den kan parametriseras med hjälp av avbildningen $(x, y) \mapsto (x, y, x^2 - y^2)$ där variablerna x och y ligger i enhetscirkelskivan (som ska betecknas med D). Normalvektorn blir

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 2x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -2y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x\\ 2y\\ 1\end{pmatrix}.$$

Den pekar uppåt vilket stämmer överens med kurvans orientering. Således

$$\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \iint_Y \operatorname{curl}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S} = \iint_D \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -2x\\ 2y\\ 1\end{pmatrix}dA$$
$$= \iint_D 2\,dA = 2\cdot\text{arean av enhetscirkelskivan} = 2\pi.$$

Anmärkning: Istället för att använda Stokes sats, så går det också bra att beräkna kurvintegralen genom att parametrisera kurvan C med $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos^2 t - \sin^2 t)$, där $t \in [0, 2\pi]$.