Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

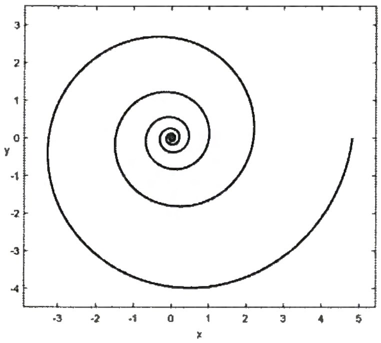
Salsdugga 2
2018-05-04, 8:05–9:05

MVE041: Flervariabelmatematik

Godkäntgränsen: 4 poäng (utav 6 p) **Hjälpmedel:** Skrivdon

Födelsedatum (åå-mm-dd): **Erhållna poäng:**

1. Beräkna längden av den logaritmiska spiral som parametriseras av



$$\mathbf{r}(t) = \left(e^{t/2}\cos 4t, e^{t/2}\sin 4t\right), \quad \text{där } t \in (-\infty, \pi). \qquad (1\text{ p})$$

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{t/2} \cos 4t - 4 e^{t/2} \sin 4t \\ \frac{1}{2} e^{t/2} \sin 4t + 4 e^{t/2} \cos 4t \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{r}\,'(t)\|^2 = \left(\tfrac{1}{2} e^{t/2} \cos 4t - 4 e^{t/2} \sin 4t\right)^2 + $$
$$+ \left(\tfrac{1}{2} e^{t/2} \sin 4t + 4 e^{t/2} \cos 4t\right)^2$$
$$= \frac{1}{4} e^{t/2 \cdot 2} + 16 \cdot e^{t/2 \cdot 2}$$
$$= \frac{65}{4} e^{t}$$

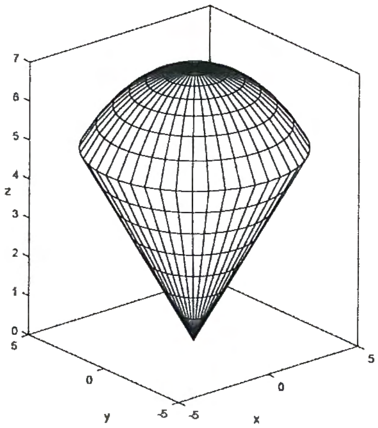
$$\ell = \int_{-\infty}^{\pi} \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_{-\infty}^{\pi} \frac{\sqrt{65}}{2} e^{t/2}\, dt = \left[\frac{\sqrt{65}}{\cancel{4}} e^{t/2}\right]_{-\infty}^{\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{65}}{\cancel{4}} e^{\pi/2}$$

2. Beräkna trippelintegralen $\iiint_K 1\,dV$, där kroppen K definieras av olikheterna

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 36 \qquad \text{och} \qquad z \ge \sqrt{x^2+y^2}. \qquad (2\text{ p})$$

Tips: Använd sfäriska koordinater. (Cylindriska k. funkar också bra, rekommenderas dock ej.)



$$x = r\sin\varphi\cos\theta \qquad r \ge 0$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$
$$z = r\cos\varphi \qquad -\pi \le \theta \le \pi$$

$$x^2+y^2+z^2 \le 36 \iff r^2 \le 6$$
$$0 \le r \le 6$$

$$z \ge \sqrt{x^2+y^2} \iff r\cos\varphi \ge \sqrt{r^2\sin^2\varphi}$$
$$\iff r\cos\varphi \ge r\sin\varphi$$
$$\iff 1 \ge \tan\varphi \implies 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$$

$$V = \iiint_K 1\,dV = \int_0^6 dr \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cdot 1 \cdot r^2 \sin\varphi =$$
$$= \int_0^6 r^2\,dr \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\varphi\,d\varphi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 1\,d\theta$$
$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^6 \cdot \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/4} \cdot \left[\theta\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{6^3}{3} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2\pi$$
$$= \underline{\underline{72 \cdot (2-\sqrt{2}) \cdot \pi}}$$

3. Finn det globala minimumet av funktionen $f(x, y) = y - x$ på ellipsen $x^2 + 4y^2 = 1$. (1 p)

$$L(x,y,\lambda) = y - x + \lambda(x^2 + 4y^2 - 1)$$

$\nabla f = (-1, 1) \neq 0 \Rightarrow$ inga stationära pkter

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -1 + 2\lambda x = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 8\lambda y = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 4y^2 - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ $1 = 2\lambda x$, $1 = -8\lambda y$

$\Downarrow$

$2\lambda x = -8\lambda y$

(medan $x, y, \lambda \neq 0$)

$\Downarrow$

$x = -4y$

$$16y^2 + 4y^2 - 1 = 0$$
$$20y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{20} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{20}}$$

Fall 1: $y = \sqrt{\frac{1}{20}}$ ger $x = -4 \cdot \sqrt{\frac{1}{20}} = -\sqrt{\frac{4}{5}}$

$$f\left(-\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{1}{20}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{5}} - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

MAX värde

Fall 2: $y = -\sqrt{\frac{1}{20}}$ ger $x = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$f\underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{2\sqrt{5}}\right)}_{\text{MIN: pkten}} = \frac{-1}{2\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{-5}{2\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{2}$$

MIN värde

4. En cirkulär paraboloid ges av ekvationen $z = x^2 + y^2$. Beräkna arean av dess yta ovanför enhetscirkelskivan. Jämför resultatet med arean av en hyperbolisk paraboloid som ges av ekvationen $z = x^2 - y^2$ (ovanför enhetscirkelskivan). (2 p)

Tips: $A = \iint_\Omega \sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}\, dx\, dy$. Ett variabelbyte rekommenderas.

cirk. paraboloid: $f(x,y) = x^2+y^2$ $\quad \nabla f = (2x, 2y)$

$$A = \iint_{\substack{\text{enhets-}\\ \text{cirkel-}\\ \text{skivan}}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy.$$

Inför polära koordinater: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$0 \le r \le 1$, $-\pi \le \theta \le \pi$, $|\det J| = r$

$$A = \int_0^1 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cdot \sqrt{1+4r^2}\cdot r = 2\pi \cdot \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{subst:} \\ s = 1+4r^2 \\ ds = 8r\,dr \end{array} \right| = 2\pi \cdot \int_1^5 \frac{1}{8}\sqrt{s}\, ds = \frac{\pi}{4}\left[\frac{s^{3/2}}{3/2}\right]_1^5$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(5^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{\pi}{6}\cdot\left(\sqrt{125} - 1\right)$$

hyp. paraboloid: $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad \nabla f = (2x, -2y)$

$$A = \iint_{\substack{\text{enhets-}\\ \text{cirkel-}\\ \text{skivan}}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy = \text{/ samma som ovan /}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{125} - 1\right)$$