

## Extra uppgifter i vektoranalys

1. Beräkna  $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$  där  $\mathbf{F} = (e^y, xe^y, 1)$  och  $C$  är kurvan längs  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$  från  $(-1, 0, 0)$  till  $(1, 0, 0)$ .

2. Bestäm konstanterna  $a$  och  $b$  så att vektorfältet  $\mathbf{F} = (axy + y^3, x^2 + bxy^2)$  blir konservativt.

3. Beräkna

$$\int_C (3x^4 + 2x^2y)dx - 2xy^2dy$$

där  $C$  är enhetscirkeln ett varv motsols.

4. Beräkna  $\int_C x ds$  där kurvan  $C$  har parameterframställningen  $\mathbf{r} = (2t^2, t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

5. Bestäm en potential  $\phi$  till vektorfältet

$$\mathbf{F} = (e^x \cos(y) + yz, xz - e^x \sin(y), xy + z),$$

med  $\phi(0, 0, 0) = 0$ . Beräkna därefter  $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$  där  $C$  är spiralen  $\mathbf{r} = (a \cos(\pi t), a \sin(\pi t), bt)$  från  $(a, 0, 0)$  till  $(a, 0, 4b)$ .

6. Låt  $\mathbf{F} = (y, -x, z)$ . Beräkna flödet av  $\mathbf{F}$  genom ytan  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $0 \leq z \leq 2$ , in mot  $z$ -axeln.

7. Beräkna  $\iint_Y \mathbf{F} \bullet \mathbf{N} dS$  där  $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ ,  $Y$  är ytan  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  och  $\mathbf{N}$  är ytans enhetsnormal riktad utåt.

8. Bestäm det största värde som kurvintegralen

$$\int_C (5x^2y^3 + 3y^5)dx + (5x - 3x^5 - 5x^3y^2)dy$$

där  $C$  är en enkel sluten kurva genomlöpt ett varv motsols, kan anta.

9. Beräkna flödet av  $\mathbf{F} = (x + y, y - x, z)$  uppåt genom ytan  $z = x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 \leq 2$ .

10. Beräkna  $\int_C (x^2 + z^2)dx + ydy + z dz$  där  $C$  är en sluten kurva med parameterframställningen  $(\cos(t), \sin(t), \cos(2t))$ .

11. Beräkna flödet av vektorfältet  $(yz, xz, -z^2)$  genom ytan  $z = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$ ,  $4x^2 + y^2 \leq 4$ . Ytan är orienterad så att ovansidan är positiv.

12. Beräkna flödet av vektorfältet  $\mathbf{F} = (y - x, y - z, x - y)$  ut genom enhetskuben, det vill säga området  $0 \leq x, y, z \leq 1$ .

## Svar

1. 2

2.  $a = 2, b = 3$

3.  $-\pi$

4.  $\frac{2846}{1215}$

5.  $\phi = e^x \cos(y) + xyz + \frac{z^2}{2} - 1, 8b^2$

6.  $\frac{16\pi}{3}$

7.  $\frac{384\pi}{5}$

8.  $\frac{10\pi}{3\sqrt{3}}$

9.  $-2\pi$

10. 0

11.  $-4\pi$

12. 0