Matematisk Analys IT2

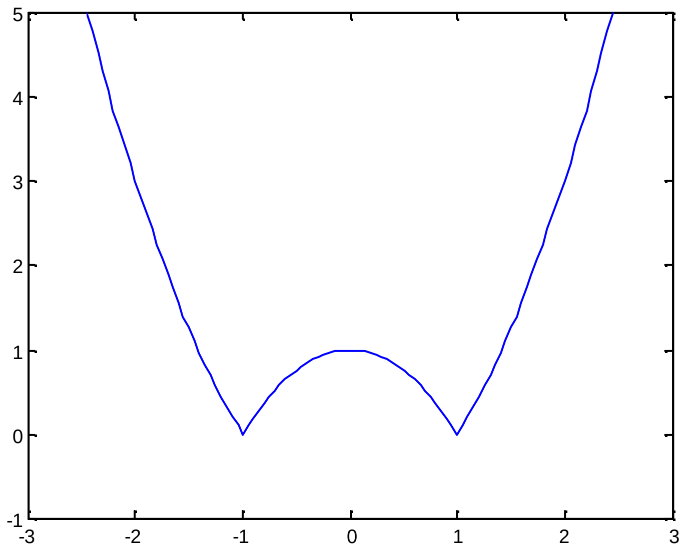
Kort sammanfattning av några av de viktigaste momenten i kursen under perioden 29 augusti – 12 september

I det allra första avsnittet i kapitel ”P” lärde vi oss att lösa en olikhet genom att skriva den på formen $f(x) > 0$ och sedan göra teckenstudium.

Vidare lärde vi oss att hantera absolutbelopp; dels genom att, när det är möjligt, använda ”avståndstolkningen”, men framför allt genom att studera uttryck innanför beloppstecknet och avgöra när dessa växlar tecken.

Exempel: För att rita kurvan $y = \left|1 - x^2\right|$ hittar vi först lösningar till $1 - x^2 = 0$, det vill säga $x = \pm 1$. Mellan dessa punkter är uttrycket innanför beloppet positivt, varför $y = 1 - x^2$ där. För övriga x-värden är beloppet negativt, och där blir $y = x^2 - 1$

Figur:



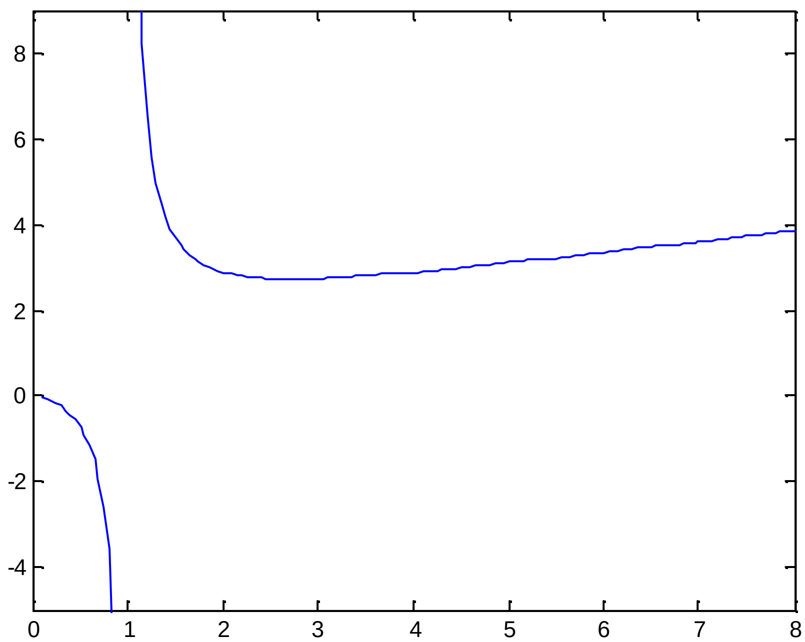
Avsnittet om trigonometri är viktigt, även om det inte är nödvändigt att behärska alla formler utantill; dock är formlerna för dubbla vinkeln värda att lägga på minnet.

Naturligtvis måste man kunna lösa enkla ekvationer som $\sin x = \frac{1}{3}$ och känna egenskaperna för inversen till sinusfunktionen. Svaret blir $x = \arcsin\frac{1}{3} + 2np$ samt $x = p - \arcsin\frac{1}{3} + 2np$ och ingenting annat.

Och på tal om arcusfunktioner bör vi minnas att i fallet arcsin och arccos är definitionsmängden begränsad. Och att $D \arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$; inte minst i kapitlen om integraler är det senare ett faktum vi kommer att utnyttja.

Att kunna skissera en funktionsgraf är alltid användbart. Man bör känna till graferna för de vanligaste funktionerna, som till exempel $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \ln x$, $y = \arctan x$. Det är också bra att kunna genomskåda enkla modifieringar av sådana kurvor; så, till exempel, ritar man grafen till $y = e^{x-1} + 1$ genom att flytta grafen till $y = e^x$ ett steg åt höger och ett steg uppåt.

Till mer komplicerade kurvor, som till exempel $y = \dfrac{x}{\ln x}$, som man inte utan vidare ser framför sig, tar man hjälp av derivatan och gör ett teckenstudium av denna.
Man noterar först att kurvan är definierad för alla positiva $x \neq 1$ och sedan att $y' = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ Vi ser att $y' > 0$ om $x > e$ och $y' < 0$ om $0 < x < e$
Vidare gäller att $y \to 0$ då $x \to 0^+$ $\left("\dfrac{0}{-\infty}" = 0! \right)$, samt att $y \to \infty$ då $x \to \infty$ (eftersom täljaren dominerar nämnaren för stora x).
I $x = 1$ får vi ett så kallat $"\dfrac{1}{0}"$-gränsvärde. Genom att granska tecknet ser vi att $y \to \infty$ då $x \to 1^+$ samt att $y \to -\infty$ då $x \to 1^-$.
Det blir nu lätt att skissera en graf:



Ett funktionsstudium som ovan blir användbart när man till exempel vill hitta största och minsta värde till en given funktion. Även när man vill visa att en given olikhet gäller kan ett sådant vara ett bra stöd; man skriver olikheten på formen $f(x) > 0$, ritar grafen till $y = f(x)$, och konstaterar att grafen ligger ovanför x-axeln.

Vad beträffar kapitlet om gränsvärden behöver vi framför allt kunna kategorisera dem. Gränsvärden av typen $"\frac{0}{0}"$ kan bli ”vad som helst” och måste skrivas om på ett eller annat sätt, genom till exempel faktorisering eller hänvisning till något standardgränsvärde som $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Notera dock att många sådana gränsvärden enklast beräknas med hjälp av Taylorutvecklingar som behandlas längre fram i kursen.
När det gäller gränsvärden då $x \to \infty$ brukar det framför allt vara en jämförelse av storleksordningen mellan de ingående uttrycken som löser problemet

Begreppet derivata är centralt i kursen. Här krävs det dels att man behärskar derivatorna för de elementära funktionerna samt de olika deriveringsreglerna. Kedjeregeln är speciellt lömsk. Den måste vi dessutom kunna hantera i situationer där inte alla ingående funktioner är kända.

> Paradexemplet är implicit derivering; låt oss säga att vi behöver information om tangenten till kurvan $x^2 y + \sin y = 4$ i någon speciell punkt. Eftersom vi omöjligt kan lösa ut y ur den givna ekvationen deriverar vi implicit och får med hjälp av såväl produkt som kedjeregeln: $2xy + x^2 y' + y' \cos y = 0$ så att
> $$y' = -\frac{2xy}{x^2 + \cos y}$$

Ett särskilt spännande avsnitt är det om inverser. Två grundläggande frågor är huruvida inversen till en given funktion existerar och sedan hur den i så fall ser ut. Om funktionen är för komplicerad, och det är den ofta, får man nöja sig med ett existensbevis med hjälp av derivata och karaktären av definitionsmängd.

> Så till exempel är det omöjligt att explicit lösa ut x ur sambandet $y = f(x)$ där $f(x) = x - \arctan x$, men eftersom $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$ (med likhet bara i $x = 0$) och funktionen är definierad för alla x, kan vi dra slutsatsen att en invers existerar. Om vi kallar denna invers för h kan vi åtminstone säga att $h\left(1 - \frac{p}{4}\right) = 1$ eftersom $f(1) = 1 - \frac{p}{4}$ och att $h'\left(1 - \frac{p}{4}\right) = 2$ eftersom $f'(1) = \frac{1}{2}$

Sambanden mellan definitions och värdemängder för en funktion och dess invers är också värda att genomskåda.